Rozdělení - příklady

18. března 2016

Instrukce:

Projděte si všechny příklady. Každý příklad se snažte pochopit. Pak vymyslete a vyřešte příklad podobný. Tím se ujistíte, že příkladu rozumíte. Další příklady najdete na stránkách Ivana Nagye.

Učivo:

Práce se známými rozděleními.
Věty o sčítání a průměrování náhodných veličin.
Centrální limitní věta.

Práce se známými rozděleními

V bitvě u Stalingradu voják průměrně přežil čtyři dni. Přitom pravděpodobnost smrti byla v kteroukoli denní i noční dobu stejná. Jaká je pravděpodobnost, že určitý voják bude po deseti dnech ještě naživu?

Zadání úlohy odpovídá exponenciálnímu rozdělení s parametrem $\lambda = 4$.
Tedy rozdělení má vzorec $f(x) = \frac{1}{4} \cdot e^{-\frac{x}{4}}$.
Spočteme nejprve pravděpodobnost, že voják zahyne do desátého dne:

$$
\begin{aligned}
P(x \leq 10) &= \int_0^{10} \frac{1}{4} \cdot e^{-\frac{x}{4}} dx = \\
&= -\int_0^{10} -\frac{1}{4} \cdot e^{-\frac{x}{4}} dx = \heartsuit
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y &= -\frac{x}{4} \\
y' &= -\frac{1}{4} \\
x = 0 &\Rightarrow y = 0 \\
x = 10 &\Rightarrow y = -\frac{10}{4}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}\heartsuit &= -\int_0^{-\frac{10}{4}} e^y dy = \\ &= \int_{-\frac{10}{4}}^0 e^y dy = \\ &= [e^y]_{-\frac{10}{4}}^0 = \\ &= 1 - e^{-\frac{10}{4}}\end{aligned}$$

Tedy pravděpodobnost, že voják bude desátého dne ještě naživu je:

$$P(x > 10) = 1 - \left(1 - e^{-\frac{10}{4}}\right) = e^{-\frac{10}{4}} = 0,0827 = 8,27\%$$

Zabloudil jsem v poušti Gobi a došel jsem na silnici, o které vím, že tudy projíždí v průměru tři auta za měsíc. Jaká je pravděpodobnost, že v průběhu příštích tří dní potkám auto?

Možný počet aut, která tudy v příštích třech dnech projedou je celočíselný, shora neomezený. To ukazuje na Poissonovo rozdělení.

Během měsíce tudy projedou v průměru tři auta, to znamená v průběhu tří dní v průměru $3 \cdot \frac{3}{30} = 0,3$ auta. Tedy parametr $\lambda = 0,3$.

Auto potkám, pokud tudy projede během tří dní libovolný počet aut kromě nuly.

Bude tedy jednodušší nejprve spočítat pravděpodobnost, že tudy žádné auto neprojede. Do vzorce pro Poissonovo rozdělení proto dosadím $k = 0$:

$$f(0) = \frac{0,3^0}{0!} \cdot e^{-0,3} = \frac{1}{1} \cdot e^{-0,3} = e^{-0,3} = 0,74 = 74\%$$

Pravděpodobnost, že nějaké auto potkám tedy bude $1 - 0,74 = 0,26 = 26\%$.

Na Sněžce má průměrný denní úhrn srážek rozdělení se střední hodnotou $\mu = 3,6\,mm$ a směrodatnou odchylkou $\sigma = 2,4\,mm$. Jaké rozdělení má roční úhrn srážek?

Roční úhrn srážek spočteme jako součet všech (365) denních úhrnů v průběhu roku. n je velké, můžeme tedy aplikovat Centrální limitní větu. Rozdělení ročního úhrnu tedy bude normální.

Spočteme střední hodnotu: $\mu_r = 365 \cdot \mu = 1314\,mm$.

Spočteme nejprve rozptyl pro denní úhrn: $\sigma^2 = 2,4^2 = 5,76\,mm^2$.

Spočteme rozptyl pro roční úhrn: $\sigma_r^2 = 365 \cdot 5,76 = 2102,4\,mm^2$.

Roční úhrn srážek na Sněžce má rozdělení $N(1314;\, 2102,4)$.

Moje autobusová linka jezdí v desetiminutovém intervalu. Jízdní řád si nepamatuji, proto na zastávku přijdu v náhodném okamžiku. Uvažujte, že tímto autobusem jezdím 400-krát ročně. Zajímá mě, kolik hodin ročně takto ztratím čekáním. Spočtěte pravděpodobnostní rozdělení pro tuto veličinu.

Doba jednotlivého čekání je mezi nulou a deseti minutami. Kdekoliv v tomto intervalu je pravděpodobnost stejná. Jedná se tedy u rovnoměrné spojité rozdělení od nuly do deseti.

Střední hodnota je: $\mu = \frac{A+B}{2} = \frac{0+10}{2} = 5$.
Rozptyl je: $\sigma^2 = \frac{(B-A)^2}{12} = \frac{(10-0)^2}{12} = \frac{100}{12}$.

Celková doba čekání vznikne sečtením 400 jednotlivých čekání.

Podle věty o sčítání náhodných veličin bude celková střední hodnota $\mu_c = n \cdot \mu = 2000$.

Rozptyl bude $\sigma_c^2 = n \cdot \sigma^2 = 3333$.

Převedu z minut na hodiny:
$\mu_c = \frac{2000}{60} = 33$
$\sigma_c^2 = \frac{3333}{60^2} = 0,93$.
Podle CLV půjde o rozdělení normální.

Celková doba pročekaného času tedy bude mít normální rozdělení $N(33,\, 0,93)$.

Mohu také napsat, že doba čekání bude $(33 \pm 0,96)\ h$, kde uvedená odchylka je směrodatná odchylka.

Náhodná veličina má na intervalu $\langle 0,3 \rangle$ distribuční funkci: $F(x) = \frac{1}{3}x$. Vlevo nula, vpravo jedna. Spočtěte pravděpodobnost, že náhodná veličina bude v intervalu $\langle 1,2 \rangle$.

$$P\left(x \in \langle 1,2 \rangle\right) = F(2) - F(1) = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

Náhodná veličina má na intervalu $\langle 0,1 \rangle$ hustotu pravděpodobnosti: $f(x) = 2x$. Jinak nula. Spočtěte pravděpodobnost, že náhodná veličina bude menší nebo rovna $\frac{1}{2}$.

$$P\left(x \leq \frac{1}{2}\right) = \int_0^{\frac{1}{2}} 2x \cdot dx = \left[x^2\right]_0^{\frac{1}{2}} = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 0^2\right] = \frac{1}{4}$$
