Pravděpodobnostní rozdělení a distribuční funkce

18. března 2016

Instrukce:

Projděte si všechny příklady. Každý příklad se snažte pochopit. Pak vymyslete a vyřešte příklad podobný. Tím se ujistíte, že příkladu rozumíte. Další příklady najdete na stránkách Ivana Nagye.

Učivo:

Pravděpodobnostní rozdělení, distribuční funkce - vzájemný převod.
Výpočet pravděpodobnosti z f i F.
Výpočet střední hodnoty a rozptylu z f.

Rozdělení pravděpodobnosti a distribuční funkce

Hustota pravděpodobnosti je mezi 0 a 4 dána funkcí $f(x) = \frac{1}{64} \cdot x^3$, jinak je nula.
Spočtěte příslušnou distribuční funkci.

$F(x) = \int_0^x \frac{1}{64} \cdot t^3 dt = \frac{1}{64} \cdot \left[\frac{t^4}{4}\right]_0^x = \frac{1}{64} \cdot \frac{x^4}{4} = \frac{x^4}{256}$ ....$x \in (0,4)$
Dobře si všimněte, jaký integrál se používá!!!
$F(x) = 0$ ....$x \in (-\infty, 0)$
$F(x) = 1$ ....$x \in (4, \infty)$

Distribuční funkce je mezi 0 a 4 dána funkcí $F(x) = \frac{1}{64} \cdot x^3$. Před tímto intervalem je nula, za tímto intervalem jedna.
Spočtěte příslušnou hustotu pravděpodobnosti.

$f(x) = \left(\frac{1}{64} \cdot x^3\right)' = \frac{1}{64} \cdot 3x^2 = \frac{3x^2}{64}$ ....$x \in (0,4)$
$f(x) = 0$ ....jinak

Máme poctivou šestistěnnou kostku.
Jaké je rozdělení pravděpodobnosti pro $x \in \{-2; 2; 3,5; 5; 8\}$?
Jaká je distribuční funkce pro $x \in \{-2; 2; 3,5; 5; 8\}$?

$f(-2) = 0$
$f(2) = \frac{1}{6}$
$f(3,5) = 0$
$f(5) = \frac{1}{6}$
$f(8) = 0$
$F(-2) = 0$
$F(2) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$
$F(3,5) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$
$F(5) = \frac{5}{6}$
$F(8) = 1$

Náhodná veličina má na intervalu $\langle 0,3 \rangle$ distribuční funkci: $F(x) = \frac{1}{3}x$. Vlevo nula, vpravo jedna. Spočtěte pravděpodobnost, že náhodná veličina bude v intervalu $\langle 1,2 \rangle$.

$$P\left(x \in \langle 1,2 \rangle\right) = F(2) - F(1) = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

Náhodná veličina má na intervalu $\langle 0,1 \rangle$ hustotu pravděpodobnosti: $f(x) = 2x$. Jinak nula. Spočtěte pravděpodobnost, že náhodná veličina bude menší nebo rovna $\frac{1}{2}$.

$$P\left(x \leq \frac{1}{2}\right) = \int_0^{\frac{1}{2}} 2x \cdot dx = \left[x^2\right]_0^{\frac{1}{2}} = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 0^2\right] = \frac{1}{4}$$

Kdy použít jaký vzorec pro střední hodnotu a rozptyl

data	kompletní = základní soubor	$\mu = \frac{\sum x_i}{n}$	$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i-\mu)^2}{n}$
	nekompletní = výběrový soubor	$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$	$s^2 = \frac{\sum (x_i-\bar{x})^2}{n-1}$
pravd. funkce	diskrétní rozdělení	$\mu = \sum_\Omega x_i \cdot f(x_i)$	$\sigma^2 = \sum_\Omega (x_i - \mu)^2 \cdot f(x_i)$
	spojité rozdělení	$\mu = \int_\Omega x \cdot f(x) \cdot dx$	$\sigma^2 = \int_\Omega (x - \mu)^2 \cdot f(x) \cdot dx$

Náhodná veličina má na intervalu $\langle 0, 1\rangle$ hustotu pravděpodobnosti: $f(x) = 2x$. Jinak nula. Spočtěte střední hodnotu, rozptyl a směrodatnou odchylku tohoto rozdělení.

Známe rozdělení této spojité náhodné veličiny. Použijeme proto patřičné vzorce.

$$\mu = \int_\Omega x \cdot f(x) \cdot dx = \int_0^1 x \cdot 2x \cdot dx = 2\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = 2 \cdot \left[\frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right] = \frac{2}{3}$$

$$\begin{aligned}
\sigma^2 &= \int_\Omega (x-\mu)^2 \cdot f(x) \cdot dx = \\
&= \int_0^1 \left(x - \frac{2}{3}\right)^2 \cdot 2x \cdot dx = \\
&= \int_0^1 \left(x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{4}{9}\right) \cdot 2x \cdot dx = \\
&= \int_0^1 \left(2x^3 - \frac{8}{3}x^2 + \frac{8}{9}x\right) \cdot dx = \\
&= \left[\frac{2}{4}x^4 - \frac{8}{9}x^3 + \frac{8}{18}x^2\right]_0^1 = \\
&= \left[\frac{2}{4}1^4 - \frac{8}{9}1^3 + \frac{8}{18}1^2\right] - \left[\frac{2}{4}0^4 - \frac{8}{9}0^3 + \frac{8}{18}0^2\right] = \\
&= \frac{1}{2} - \frac{8}{9} + \frac{4}{9} = \frac{9 - 16 + 8}{18} = \frac{1}{18} \doteq 0,0556
\end{aligned}$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\frac{1}{18}} \doteq 0,236$$

Náhodná veličina definovaná na základním prostoru $\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ má rozdělení:

$$f(k) = \frac{1}{2^4} \cdot \binom{4}{k}$$

Spočtěte střední hodnotu, rozptyl a směrodatnou odchylku tohoto rozdělení.

Známe rozdělení této diskrétní náhodné veličiny. Použijeme proto patřičné vzorce.

$$\mu = \sum_\Omega k \cdot f(k) = \sum_{k=0}^4 k \cdot f(k) = \ldots$$

$$\sigma^2 \quad = \quad \sum_{\Omega} (k-\mu)^2 \cdot f(k) = \sum_{k=0}^{4} (k-\mu)^2 \cdot f(k) = ...$$

k	$f(k)$	$k \cdot f(k)$	$k-\mu$	$(k-\mu)^2$	$(k-\mu)^2 \cdot f(k)$
0	$\frac{1}{2^4} \cdot \binom{4}{0} = \frac{1}{16}$	0	-2	4	$\frac{4}{16}$
1	$\frac{1}{2^4} \cdot \binom{4}{1} = \frac{4}{16}$	$\frac{1}{4}$	-1	1	$\frac{4}{16}$
2	$\frac{1}{2^4} \cdot \binom{4}{2} = \frac{6}{16}$	$\frac{3}{4}$	0	0	0
3	$\frac{1}{2^4} \cdot \binom{4}{3} = \frac{4}{16}$	$\frac{3}{4}$	1	1	$\frac{4}{16}$
4	$\frac{1}{2^4} \cdot \binom{4}{4} = \frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	2	4	$\frac{4}{16}$
		2			1

$$\mu = 2$$

$$\sigma^2 \quad = \quad 1$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = 1$$