Souřadnice

Pavel Provinský

5. února 2013

Vraťme se ale k fyzice. Galileo si povšiml, že stejné zákony platí v soustavách, které se nepohybují i které se pohybují rovnoměrně přímočaře. Podle speciální relativity pak mezi těmito inerciálními soustavami neplatí Galileova transformace, ale transformace Lorentzova. V obecné relativitě se Einstein pokusil rozvinout myšlenku, že stejné zákony by měly platit v soustavách všech. Inerciálních i neinerciálních. Tento princip se nazývá princip obecné kovariance nebo také princip obecné relativity.

Jak by to ale mohlo být možné? Podívejme se na jeden konkrétní případ, na první Newtonův zákon. Podle něj se částice, pro níž je výslednice všech působících sil nulová, buď nepohybuje vůbec, nebo se pohybuje rovnoměrně přímočaře. Tedy každopádně zrychlení částice je nulové: $\vec{a} = 0$. Takto ovšem zákon platí v soustavách inerciálních. Jak předpis zobecnit, aby platil v soustavách všech?

Nejprve si domluvme značení: x^1, x^2 a x^3 budou tři prostorové souřadnice v nějaké soustavě souřadnic. Tyto souřadnice zdaleka nemusí být kartézské. Budeme ostatně uvažovat o prostorech, které mohou být všelijak zakřivené, tam by ani globální kartézská soustava nebyla možná. Čtvrtou souřadnici x^0 zavedeme nějak pomocí času t. Např. takto: $x^0 = ct$, kde c je rychlost světla.

Čtyřvektor $\left(x^0, x^1, x^2, x^3\right)$ budeme častěji značit jednoduše x^α. Řecké indexy budou vždy probíhat hodnoty nula až tři, přičemž nula bude patřit časové souřadnici.

V obecné teorii relativity budeme uvažovat různě zakřivené časoprostory, vždy však budeme předpokládat, že v každém uvažovaném bodě můžeme alespoň v maličkatém okolí situaci popsat téměř přesně kartézskou inerciální soustavou souřadnic. V různých bodech samozřejmě mohou být tyto kartézské inerciální soustavy různé. Podobně jako na povrchu Zeměkoule můžeme zavést jednu kartézskou soustavu na poli v Čechách a jinou na poli v Ugandě, nemůžeme však zavést jedny kartézské souřadnice pro celý povrch koule.

Tyto lokální inerciální kartézské systémy souřadnic budeme značit ξ^α. (Tedy ξ^0, ξ^1, ξ^2 a ξ^3.) (Časovou souřadnici zavedeme jako $\xi^0 = ct$.) Z kontextu bude zřejmé, v jakém bodě tuto inerciální soustavu uvažujeme. (Tedy i jaký čas uvažujeme.)

Dále zavedeme pojem vlastní čas τ. To je čas, který by ukazovaly hodiny spojené s danou myšlenou nebo skutečnou částicí. Tento čas bude samozřejmě ve všech soustavách stejný. Transformuje se tedy jednoduše $\tau' = \tau$. Veličiny s touto nejjednodušší transformací mezi souřadnými systémy nazýváme skaláry.

O výše uvedených souřadnicích x^α budeme předpokládat, že jsou vůči souřadnicím ξ^α spojité a hladké. Budou tedy existovat např. derivace $\frac{\partial x^\alpha}{\partial \xi^\beta}$ a další. [1]

Dále zavedeme tzv. Einsteinovu sumační konvenci. Bude-li se v nějakém členu na horní i dolní pozici vyskytovat stejný index, budeme přes něj automaticky sčítat. Tedy např. $\frac{d\xi^\alpha}{dx^\mu} . \frac{dx^\mu}{d\tau} \equiv \sum_{\mu=0}^{3} \frac{d\xi^\alpha}{dx^\mu} . \frac{dx^\mu}{d\tau}$. [2]

Nyní již můžeme první Newtonův zákon $\vec{a} = 0$ přepsat do tvaru platného ve všech souřadných soustavách. Využijeme toho, že vektor rychlosti je první derivací polohového vektoru podle času a zrychlení je druhou derivací polohového vektoru podle času. Můžeme tedy psát: $\frac{d^2\xi^\alpha}{d\tau^2} = 0$. (Tento vztah platí i pro časovou složku.) A upravíme:

$$\frac{d^2\xi^\alpha}{d\tau^2} = \frac{d}{d\tau}\left(\frac{d\xi^\alpha}{d\tau}\right) = \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\mu} . \frac{dx^\mu}{d\tau}\right) = \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\mu}\right) . \frac{dx^\mu}{d\tau} + \frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\mu} . \frac{d}{d\tau}\left(\frac{dx^\mu}{d\tau}\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\mu}\right) . \frac{dx^\nu}{d\tau} . \frac{dx^\mu}{d\tau} + \frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\mu} . \frac{d}{d\tau}\left(\frac{dx^\mu}{d\tau}\right) = 0$$

[1] Mimochodem, $\frac{\partial x^\alpha}{\partial \xi^\beta}$ je tenzor druhého řádu tedy čtyři krát čtyři: $\begin{pmatrix} \frac{\partial x^0}{\partial \xi^0} & \frac{\partial x^0}{\partial \xi^1} & \frac{\partial x^0}{\partial \xi^2} & \frac{\partial x^0}{\partial \xi^3} \\ \frac{\partial x^1}{\partial \xi^0} & \frac{\partial x^1}{\partial \xi^1} & \frac{\partial x^1}{\partial \xi^2} & \frac{\partial x^1}{\partial \xi^3} \\ \frac{\partial x^2}{\partial \xi^0} & \frac{\partial x^2}{\partial \xi^1} & \frac{\partial x^2}{\partial \xi^2} & \frac{\partial x^2}{\partial \xi^3} \\ \frac{\partial x^3}{\partial \xi^0} & \frac{\partial x^3}{\partial \xi^1} & \frac{\partial x^3}{\partial \xi^2} & \frac{\partial x^3}{\partial \xi^3} \end{pmatrix}$

[2] Tedy derivace $\frac{\partial x^\alpha}{\partial \xi^\alpha}$ nebude vektor $\left(\frac{\partial x^0}{\partial \xi^0}, \frac{\partial x^1}{\partial \xi^1}, \frac{\partial x^2}{\partial \xi^2}, \frac{\partial x^3}{\partial \xi^3}\right)$, jak bychom si mohli myslet, ale součet členů tohoto vektoru: $\frac{\partial x^0}{\partial \xi^0} + \frac{\partial x^1}{\partial \xi^1} + \frac{\partial x^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial x^3}{\partial \xi^3}$.

Pokud v předchozích úpravách někdo zabloudil, jde jen o běžná pravidla pro derivace, pravda, napsaná v poněkud nezvyklé notaci. Totéž v běžném zápise by bylo podstatně delší.

Vynásobme získanou rovnici faktorem $\frac{\partial x^\rho}{\partial \xi^\alpha}$ a použijme $\frac{\partial x^\rho}{\partial \xi^\alpha}.\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} = \frac{\partial x^\rho}{\partial x^\mu} = \delta^\rho_\mu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$:

$$\frac{\partial x^\rho}{\partial \xi^\alpha}.\frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\nu \partial x^\mu}.\frac{dx^\nu}{d\tau}.\frac{dx^\mu}{d\tau} + \frac{d}{d\tau}\left(\frac{dx^\rho}{d\tau}\right) = 0$$

Nyní už jen části této rovnice vhodně pojmenujeme. Nejprve zavedeme pojem čtyřrychlost: $u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau}$. Jedná se o přirozené zobecnění pojmu rychlost. Některé složky nemusí mít rozměr $\frac{m}{s}$. Např. pokud souřadnice určuje úhel.

Dále zavedeme tzv. Christoffelovy symboly předpisem: $\Gamma^\rho_{\mu\nu} \equiv \frac{\partial x^\rho}{\partial \xi^\alpha}.\frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\nu \partial x^\mu}$. (Tedy $\Gamma^\rho_{\mu\nu} \equiv \sum_{\alpha=0}^{3} \frac{\partial x^\rho}{\partial \xi^\alpha}.\frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\nu \partial x^\mu}$.) Christoffelovy symboly jsou tedy souborem $4.4.4 = 64$ funkcí souřadnic x^α. Mohou odpovídat pouhému zavedení křivočarých souřadnic v euklidovském časoprostoru. Protože však pomocí čtyř souřadnic mohu popsat i časoprostory zakřivené, mohou v sobě obsahovat i informaci o zakřivení časoprostoru.

Nyní již můžeme první Newtonův zákon přepsat do tvaru, v němž platí ve všech soustavách: [3]

$$\frac{d}{d\tau}\left(u^\rho\right) + \Gamma^\rho_{\mu\nu}.u^\mu.u^\nu = 0$$

Této rovnici budeme říkat rovnice volného pádu a vytěžíme z ní ještě mnoho cenného. [4]

Reference

[1] Leoš Dvořák: *Obecná teorie relativity a moderní fyzikální obraz vesmíru*, SPN, Praha, 1984

[3] Přesněji v soustavách, které jsou spojité a hladké vůči jednotlivým lokálním soustavám inerciálním, takže můžeme zavést všechny potřebné derivace.

[4] Zpracováno dle [1, strany 81,91-92].