Čtyřinterval

Pavel Provinský

5. března 2013

Asi bychom se divili, kdybychom vzali pravítko a jeho délka by se při každém pootočení nebo posunutí změnila. Délka je v euklidovském prostoru invariantem daným Pythagorovou větou: $\Delta l^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$, kde x, y, z jsou kartézské souřadnice. Při otočení či posunutí souřadné soustavy se jednotlivé souřadnice měnit budou, Δl však zůstane stejná.

Speciální teorie relativity však říká, že v pohybujících se inerciálních soustavách se budou délky Δl zkracovat a přesně invariantní tedy nebudou. Invariantní však bude čtyřinterval Δs daný předpisem $\Delta s^2 = -c^2\Delta t^2 + \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$. Je to takové zobecnění vzdálenosti pro časoprostor. Tato veličina zůstane ve všech inerciálních soustavách stejná. [1]

Podívejme se, jak můžeme čtyřinterval zapsat pomocí obecných souřadnic v obecné teorii relativity: V lokálních inerciálních systémech bude tvar stejný jako ve speciální teorii relativity: [2]

$$ds^2 = -c^2dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 = -\left(d\xi^0\right)^2 + \left(d\xi^1\right)^2 + \left(d\xi^2\right)^2 + \left(d\xi^3\right)^2 = \mu_{\alpha\beta}d\xi^\alpha d\xi^\beta$$

kde

$$\mu_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

je tzv. Minkowského tenzor. Protože pro obecné souřadnice platí: $dx^\gamma = \frac{\partial x^\gamma}{\partial \xi^\alpha}d\xi^\alpha$, resp. $d\xi^\alpha = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\gamma}dx^\gamma$, můžeme psát

$$ds^2 = \mu_{\alpha\beta}d\xi^\alpha d\xi^\beta = \mu_{\alpha\beta}\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\gamma}dx^\gamma \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\delta}dx^\delta = g_{\gamma\delta}dx^\gamma dx^\delta$$

kde [3]

$$g_{\gamma\delta} = \mu_{\alpha\beta}\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\gamma}\frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\delta}$$

je metrický tenzor. Ten nám říká, jak v obecných souřadnicích měřit v plochém či zakřiveném světě časoprostorové vzdálenosti.

Příklad s válcovými souřadnicemi V tomto příkladě si vezmeme obyčejný euklidovský prostor, jen místo kartézských souřadnic budeme uvažovat souřadnice válcové: t, R, φ, z. Platí známé vztahy, které známe za střední školy. Jen jsme obvykle míslo ξ^1, ξ^2, ξ^3 psali x, y, z: $\xi^0 = ct$, $\xi^1 = R\cos\varphi$, $\xi^2 = R\sin\varphi$, $\xi^3 = z$. Pak např. $\frac{\partial \xi^1}{\partial R} = \cos\varphi$. Po dopočítání a dosazení dalších derivací získáme:

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ 0 & -R\sin\varphi & R\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -R\sin\varphi & 0 \\ 0 & \sin\varphi & R\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

[1] Ukázat se to dá snadno pro částici letící rychlostí světla: Ta za čas Δt uletí nějaké Δl. Tedy $c.\Delta t = \Delta l$. Tedy $c^2\Delta t^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$. Tedy $-c^2\Delta t^2 + \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 = 0$. Protože rychlost světla je ve všech inerciálních soustavách stejná, bude tato rovnice platit ve všech těchto soustavách. Jednotlivé $\Delta t, \Delta x, \Delta y, \Delta z$ však mohou být různé. Tedy Δs bude ve všech soustavách stejné, v našem případě nulové: $\Delta s^2 = -c^2\Delta t_1^2 + \Delta x_1^2 + \Delta y_1^2 + \Delta z_1^2 = -c^2\Delta t_2^2 + \Delta x_2^2 + \Delta y_2^2 + \Delta z_2^2 = 0$.

[2] Protože náš inerciální systém je relevantní jen lokálně, volíme jen malé rozdíly souřadnic.

[3] Metrický tenzor je obdobou Minkovského tenzoru ze speciální teorie relativity. Podobně jako pro Minkovského tenzor tedy musí platit, že existuje směr, v němž je $ds^2 < 0$, to je směr časový, a tři nezávislé směry, v nichž je $ds^2 > 0$. To jsou směry prostorové.

Tedy $ds^2 = -c^2dt^2 + dR^2 + R^2d\varphi^2 + dz^2$.

Pokud necháme čas konstantní, dostáváme obvyklý předpis pro měření vzdáleností ve válcové souřadné soustavě: $dl^2 = dR^2 + R^2d\varphi^2 + dz^2$.

Příklad s rotujícím diskem Velmi zajímavý je další příklad, kdy zavedeme válcové souřadnice spojené s diskem rotujícím úhlovou rychlostí ω. Tedy: $t' = t$, $R' = R$, $\varphi' = \varphi - \omega t$, $z' = z$. Když napočítáme všechny derivace, získáme čtyřinterval $ds^2 = -c^2\left(1 - \frac{\omega^2R'^2}{c^2}\right)dt'^2 + dR'^2 + R'^2d\varphi'^2 + dz'^2 + 2\omega R'^2d\varphi'dt'$.

Všimněme si, že výraz obsahuje i smíšený člen $2\omega R'^2d\varphi'dt'$ a $g_{\alpha\beta}$ v tomto případě tedy není diagonální jako minule.

Pokud dále použijeme vztah speciální teorie relativity pro vlastní čas hodin $d\tau = \frac{1}{c}\sqrt{-ds^2}$ [4] a necháme prostorové souřadnice konstantní, [5] získáme pro vlastní čas hodin unášených na disku $d\tau = \sqrt{1 - \frac{\omega^2R'^2}{c^2}}dt'$. Vidíme, že čas na rotujícím disku běží pomaleji, a to tím více, čím vzdálenější jsme od osy otáčení. [6]

Představme si, že ve středu disku blikneme a světelný signál zachytíme ve vzdálenosti r. Disk se mezitím pootočil o úhel $\alpha = \arcsin\left(\frac{\omega}{c}R'\right)$. [7]

Zvolme r tak, aby úhel pootočení byl právě 90°, čili $\frac{\pi}{2}$. Tedy $\frac{\pi}{2} = \arcsin\left(\frac{\omega}{c}r\right)$. To je právě mezní poloměr, kdy bod na kraji disku dosahuje rychlosti světla. [8] Světlo za nějaký čas dorazilo ze středu disku na jeho okraj. Za tentýž čas opsal bod na okraji disku také rychlostí světla čtvrtkružnici. Musíme tedy připustit, že délky tohoto poloměru a této čtvrtkružnice jsou stejné. Pro obvod této kružnice pak vychází $O = 4r$ (jako na kouli pro rovník) a nikoli euklidovské $O = 2\pi r$. Tedy geometrie na rotujícím disku nemůže být euklidovská.

Zjistili jsme, že rotace disku zakřivuje čas i prostor. Přesto se nám podařilo situaci popsat pomocí vztahů mezi souřadnicemi resp. pomocí metrického tenzoru. Bylo to naše první setkání s opravdu zakřiveným časoprostorem.

Reference

[1] Leoš Dvořák: *Obecná teorie relativity a moderní fyzikální obraz vesmíru*, SPN, Praha, 1984

[4] Pro hodiny spojené se soustavou souřadnic jsou prostorové souřadnice konstantní a tedy $ds^2 = -c^2d\tau^2$.

[5] Tedy $dR, d\varphi, dz$ budou nulové.

[6] Uvažujeme jen tak velký disk, aby obvodová rychlost nepřesáhla rychlost světla. Oba příklady zpracovány podle [1, strany 83-86].

[7] Jaký čas t' mezitím uplynul a o jaký úhel se disk mezitím pootočil? Pro světelný signál platí $ds = 0$. Pokud φ i z budou konstantní, pak $0 = -c^2\left(1 - \frac{\omega^2R'^2}{c^2}\right)dt'^2 + dR'^2$, tedy $c^2\left(1 - \frac{\omega^2R'^2}{c^2}\right)dt'^2 = dR'^2$, tedy $dR' = c\sqrt{1 - \frac{\omega^2R'^2}{c^2}}dt'$, tedy $\int \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\omega^2R'^2}{c^2}}}dR' = \int c.dt'$, tedy $\frac{c}{\omega}\arcsin\left(\frac{\omega}{c}R'\right) = ct' + K$. Nechť při $t' = 0$ je $R' = 0$. Pak $K = 0$ a $t' = \frac{1}{\omega}\arcsin\left(\frac{\omega}{c}R'\right)$. Disk se tedy otočí o úhel $\alpha = \omega.\frac{1}{\omega}\arcsin\left(\frac{\omega}{c}R'\right) = \arcsin\left(\frac{\omega}{c}R'\right)$.

[8] $\frac{\pi}{2} = \arcsin\left(\frac{\omega}{c}r\right)$, tedy $1 = \frac{\omega}{c}r$, tedy $\omega r = c$.