Horní a dolní indexy

Pavel Provinský

5. února 2013

Horní a dolní indexy v obecné teorii relativity

V obecné teorii relativity jsme se setkali s horními a dolními indexy. Udělejme si pořádek v tom, kam se který index píše a jaké veličiny v teorii vystupují.

Skalárem nazveme veličinu, která je ve všech soustavách stejná. Příkladem je vlastní čas částice τ.

Kontravariantní vektory v^α mají index nahoře. Jejich definiční vlastností je, že pokud přecházíme od soustavy souřadnic x^α k soustavě y^β, transformují se vztahem: $v'^\beta = \frac{\partial y^\beta}{\partial x^\alpha}.v^\alpha$. (Připomínáme Einsteinovu sčítací konvenci; zde sečteme přes indexy α.) Příkladem kontravariantních vektorů jsou přímo diferenciály souřadnic dx^α nebo čtyřrychlost u^α.

Kovariantní vektory v_α píšeme s indexem dole. Příkladem může být parciální derivace skaláru $a_{,\alpha} = \frac{\partial a}{\partial x^\alpha}$. Definiční vlastností kovariantních vektorů je, že se transformují podle vztahu: $v'_\beta = \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\beta}.v_\alpha$. (Opravdu je $\frac{\partial a}{\partial y^\beta} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\beta} \cdot \frac{\partial a}{\partial x^\alpha}$.)

Tenzory mohou mít nahoře i dole libovolný počet indexů. Jejich definiční vlastností je, že se transformují podle vztahu: $T'^{\mu\nu\dots}_{\rho\sigma\dots} = \frac{\partial y^\mu}{\partial x^\alpha}\frac{\partial y^\nu}{\partial x^\beta}\dots\frac{\partial x^\iota}{\partial y^\rho}\frac{\partial x^\kappa}{\partial y^\sigma}\dots T^{\alpha\beta\dots}_{\iota\kappa\dots}$. Je však třeba upozornit, že ne vše, co má v obecné teorii relativity indexy, je tenzor. Např. Christoffelovy koeficienty $\Gamma^\rho_{\mu\nu}$ tenzory nejsou, protože nesplňují příslušný transformační vztah.

Dodefinujme k metrickému tenzoru $g_{\alpha\beta}$ inverzní tenzor $g^{\alpha\beta}$. Tedy $g_{\alpha\beta}.g^{\beta\gamma} = \delta^\gamma_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Tyto dva tenzory jsou velmi důležité, protože s jejich pomocí můžeme přesouvat indexy shora dolů a opačně. Říká se tomu snižování resp. zvyšování indexu: Např. $v^\alpha.g_{\alpha\beta} = v_\beta$. Nebo $T_{\alpha\beta}.g^{\alpha\gamma}.g^{\beta\delta} = T^{\gamma\delta}$.

Nyní se ještě na chvilku vraťme k Einsteinově sumační konvenci. Můžeme ji použít nejen v podobě $\frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\beta} \cdot \frac{\partial a}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial a}{\partial x^\beta}$ nebo $v^\alpha.g_{\alpha\beta} = v_\beta$. Další možností je i $T^\alpha_\alpha = T$. Této práci s tenzory se říká úžení tenzoru. Z tenzoru čtyři krát čtyři tak vyrobíme skalár. S úžením se ještě setkáme.

Nyní se budeme věnovat derivacím. Parciální derivaci podle souřadnic značíme čárkou před indexy, podle nichž derivujeme. Tedy např. vektor $a_{,\alpha} = \frac{\partial a}{\partial x^\alpha}$ je parciální derivace skaláru a podle čtyř souřadnic. [1] Nebo např. $T^{\alpha\beta}_{,\gamma} = \frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma}$. Tento objekt má $4.4.4 = 64$ složek. Naproti tomu $T^{\alpha\beta}_{,\alpha} = \frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial x^\alpha}$ má složky jen čtyři.

Parciální derivace skaláru je vektor. Avšak parciální derivace vyšších tenzorů v zakřiveném časoprostoru už obecně tenzory nejsou. Proto místo parciální derivace zavádíme tzv. kovariantní derivaci, která v zakřiveném časoprostoru vystupuje místo derivace parciální a s vlivy zakřivení už počítá. Značí se místo čárky středníkem a je definována vztahy:

kontravariantní vektor	$A^\mu_{;\beta} = A^\mu_{,\beta} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}.A^\alpha$
kovariantní vektor	$B_{\mu;\beta} = B_{\mu,\beta} - \Gamma^\alpha_{\mu\beta}.B_\alpha$
obecný tenzor	$T^{\alpha\beta\dots}_{\mu\nu\dots;\rho} = T^{\alpha\beta\dots}_{\mu\nu\dots,\rho} + \Gamma^\alpha_{\omega\rho}.T^{\omega\beta\dots}_{\mu\nu\dots} + \Gamma^\beta_{\omega\rho}.T^{\alpha\omega\dots}_{\mu\nu\dots} + \dots - \Gamma^\omega_{\mu\rho}.T^{\alpha\beta\dots}_{\omega\nu\dots} - \Gamma^\omega_{\nu\rho}.T^{\alpha\beta\dots}_{\mu\omega\dots} - \dots$

Kovariantní derivace tenzoru již je tenzor. Tedy např. $T^{\alpha\beta}_{;\gamma}$ je tenzor třetího řádu a $T^{\alpha\beta}_{;\alpha}$ je vektor.

[1] Takový vektor se nazývá gradient a.

Obdobná situace nastává, pokud sledujeme nějaký vektor A^α podél křivky popsané parametrem λ. Pak derivace $\frac{dA^\alpha}{d\lambda}$ nemá v zakřiveném časoprostoru ty správné transformační vlastnosti a není tudíž vektorem. Zavádíme proto místo obyčejné derivace tzv. absolutní derivaci, která v zakřiveném časoprostoru nahrazuje derivaci obyčejnou a se zakřivením již počítá. Je definována vztahy:

kontravariantní vektor	$\frac{DA^\mu}{d\lambda} = \frac{dA^\mu}{d\lambda} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}.A^\alpha.\frac{dx^\beta}{d\lambda}$
kovariantní vektor	$\frac{DB_\mu}{d\lambda} = \frac{dB_\mu}{d\lambda} - \Gamma^\alpha_{\mu\beta}.B_\alpha.\frac{dx^\beta}{d\lambda}$
obecný tenzor	$\frac{DT^{\alpha\beta\ldots}_{\mu\nu\ldots}}{d\lambda} = T^{\alpha\beta\ldots}_{\mu\nu\ldots;\rho}.\frac{dx^\rho}{d\lambda}$

Všimněte si, že ve třetím řádku je středník a k definici jsme tedy použili kovariantní derivaci.

Absolutní derivací tenzoru je opět tenzor.

Při zobecňování přírodních zákonů pro zakřivený prostoročas tedy nahrazujeme obyčejné derivace derivací absolutní a parciální derivace derivací kovariantní.

Tedy např. první Newtonův zákon bude v obecné teorii relativity vypadat takto: $\frac{Du^\alpha}{d\tau} = 0$ Opravdu. [2] Po rozepsání získáme nám již známou rovnici volného pádu $\frac{d}{d\tau}\left(u^\alpha\right) + \Gamma^\alpha_{\mu\nu}.u^\mu.u^\nu = 0$ [3]

Reference

[1] Leoš Dvořák: *Obecná teorie relativity a moderní fyzikální obraz vesmíru*, SPN, Praha, 1984

[2] Čtyřzrychlení je derivací čtyřrychlosti podle vlastního času. Podobně jako zrychlení je derivací rychlosti.

[3] Dle [1, strany 89,105,112-116, 134-135].