Einsteinův gravitační zákon

Pavel Provinský

8. března 2013

Zakřivení časoprostoru a gravitace

Až dosud jsme jen rozvíjeli relativistickou geometrii. Nyní se podívejme, jak bychom mohli stejným formalizmem popsat i gravitaci.

V Newtonově mechanice vystupuje hmotnost ve dvou podobách. Jednak jako hmotnost setrvačná, jednak jako jakýsi „gravitační náboj". To, že tyto hmotnosti jsou pro každé těleso stejně velké, je určitým překvapením. [1] V důsledku toho padají v gravitačním poli všechna tělesa stejně rychle. Proto můžeme alespoň lokálně [2] zavést volně padající soustavu, v níž budou tělesa, na která působí jen gravitační síla, v klidu nebo rovnoměrně přímočarém pohybu. Tyto padající soustavy jsou našimi lokálními inerciálními systémy ξ^α.

Zrychleným pohybem se nám podařilo „zrušit" gravitaci. Tento stav beztíže známe např. z družic. Naopak zrychleným pohybem např. rakety vyvoláme stejné jevy, jako by raketa byla v gravitačním poli.

Můžeme tedy zformulovat další důležitý princip obecné teorie relativity, princip ekvivalence: Gravitační pole je lokálně ekvivalentní zrychlenému pohybu systému. Umíme-li nějakými prostředky popsat efekty zrychlení, měli bychom týmiž prostředky umět popsat i gravitaci.

A na příkladu rotujícího disku jsme si ukázali, že (odstředivé) zrychlení souvisí se zakřivením časoprostoru. Můžeme tedy očekávat, že zrychlení gravitační a tedy gravitující tělesa budou časoprostor také zakřivovat.

Obecné souřadné systémy jsme popisovali pomocí metrického tenzoru nebo Christoffelových koeficientů. Stejně tedy popíšeme i gravitační pole. Volbu mezi metrickým tenzorem a Christoffelovými koeficienty nemusíme provádět, neboť mezi oběma existuje vztah:

$$\Gamma^\rho_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} \left(-g_{\mu\nu,\sigma} + g_{\sigma\mu,\nu} + g_{\nu\sigma,\mu} \right)$$

Pokusme se nejprve nějak podrobněji popsat míru zakřivení časoprostoru. Využijme k tomu poznatku, že veličina, jejíž derivace je nulová, zůstává konstantní. Jsme v zakřiveném časoprostoru, použijeme proto derivaci absolutní. Pokud tedy při pohybu podél nějaké křivky bude stále $\frac{DA^\alpha}{d\lambda} = 0$, budeme to chápat tak, že vektor A^α je stále stejný. Pak říkáme, že daný vektor podél křivky přenášíme.

V zakřiveném časoprostoru se nám ale může stát, že když přeneseme týž vektor z bodu A do bodu B po dvou různých křivkách, obdržíme nakonec různé vektory. [3] Tyto vektory budou patrně tím rozdílnější, čím je prostoročas křivější. Abychom měřili křivost v jediném bodě, budeme vektor A^α přenášet v limitně malém čtyřúhelníku daném vektory Δx^α a Δy^α. Nejprve v pořadí Δx^α, Δy^α, podruhé v pořadí opačném. Získáme přenesené vektory $A^\alpha_{\Delta x \Delta y}$ a $A^\alpha_{\Delta y \Delta x}$. Pro jejich rozdíl platí vztah:

$$A^\alpha_{\Delta x \Delta y} - A^\alpha_{\Delta y \Delta x} = \left[\Gamma^\alpha_{\beta\delta,\gamma} - \Gamma^\alpha_{\beta\gamma,\delta} + \Gamma^\rho_{\beta\delta}\Gamma^\alpha_{\rho\gamma} - \Gamma^\rho_{\beta\gamma}\Gamma^\alpha_{\rho\delta} \right] .A^\beta.\Delta x^\gamma.\Delta y^\delta$$

Přenášený vektor může být různý, stejně jako vektory čtyřúhelníku. Samotnou křivost prostoročasu tedy charakterizuje výraz v hranatých závorkách, který se nazývá Riemannův tenzor a značí se:

$$R^\alpha_{\beta\gamma\delta} = \Gamma^\alpha_{\beta\delta,\gamma} - \Gamma^\alpha_{\beta\gamma,\delta} + \Gamma^\rho_{\beta\delta}\Gamma^\alpha_{\rho\gamma} - \Gamma^\rho_{\beta\gamma}\Gamma^\alpha_{\rho\delta}$$

[1] Rovnost obou hmotností ověřoval už Newton s přesností 10^{-3}. V roce 1887 pak Bessel s přesností 2.10^{-5}. Oba pomocí kyvadla. Pomocí torzních vah pak 1889 Loránd Eötvös dosáhl přesnosti 5.10^{-8} a v roce 1909 s Pekarem a Feketem dokonce přesnosti 3.10^{-9}. Porovnával odstředivou sílu rotující Země působící na stejně těžká tělesa z různých materiálů. 1964 v podobném pokusu dosáhli Dicke, Krotkov a Roll v Princetonu přesnosti 10^{-11}. Použili odstředivou sílu pohybu Země kolem Slunce. Potřebné otáčení přístroje jim zajišťovala Země svou rotací. (Již přiblížení experimentátora na několik metrů by znatelně vychýlilo přístroj.) V roce 1971 Braginsky a Panov v Moskvě dosáhli v obdobném pokusu přesnosti 10^{-12}. Dle [1, strany 64-66].

[2] Ve velkých rozměrech může mít gravitační pole v různých místech různé směry a velikosti a naše úvaha by pak neplatila.

[3] Představit si to můžeme na příkladu Zeměkoule. Představme si, že jsme na rovníku a vektor „k severu" přeneseme severním směrem na severní pól. Druhou cestu zvolíme tak, že nejprve objedeme čtvrt Zeměkoule na západ. Přenášený vektor bude stále ukazovat k severu. Když nyní přeneseme vektor severním směrem na severní pól, budou oba přenesené vektory svírat pravý úhel.

Riemannův tenzor je tenzor čtvrtého řádu a díky symetriím a antisymetriím obsahuje jen 20 nezávislých složek. [4] V plochém prostoročase jsou všechny jeho složky nulové.

Z Riemannova tenzoru můžeme zkonstruovat Ricciho tenzor:

$$R_{\alpha\beta} = R^{\rho}_{\alpha\rho\beta}$$

Z Ricciho tenzoru pak skalární křivost:

$$R = R^{\alpha}_{\alpha}$$

Odvození Einsteinova gravitačního zákona

Nyní se pokusíme uhádnout vztah mezi zakřivením prostoročasu a rozložením hmoty. Protože hledáme zákon, který bude invariantní ve všech soustavách souřadnic, hledáme zákon tenzorový. Nejjednodušší takový zákon může mít tvar $G_{\alpha\beta} = k.T_{\alpha\beta}$, kde tenzor na levé straně popisuje zakřivení časoprostoru a tenzor napravo rozložení hmoty.

Zakřivení časoprostoru umíme popsat pomocí Riemannova tenzoru. Ten umíme vyjádřit pomocí derivací Christoffelových koeficientů. Ty zas umíme vyjádřit pomocí derivací metrického tenzoru. V tenzoru $G_{\alpha\beta}$ tedy můžeme očekávat až druhé derivace metrického tenzoru. Zkusme zákon matematicky co nejjednodušší, tedy takový, ve kterém vystupují druhé derivace metrického tenzoru pouze lineárně. [5] Dá se ukázat, že v takovém případě musí mít levá strana zákona tvar $a.R_{\alpha\beta} + b.Rg_{\alpha\beta} + c.g_{\alpha\beta}$.

Tenzory $R_{\alpha\beta}$ i $g_{\alpha\beta}$ jsou symetrické, tedy celá levá strana je symetrickým tenzorem. Tedy i rozložení hmoty na pravé straně bude popsáno symetrickým tenzorem. Tu se nám nabízí symetrický tenzor energie - hybnosti $T_{\alpha\beta}$ ze speciální teorie relativity.

Máme tedy odhad gravitačního zákona ve tvaru $a.R_{\alpha\beta} + b.R.g_{\alpha\beta} + c.g_{\alpha\beta} = k.T_{\alpha\beta}$. Pokud uvažujeme vesmír bez hmoty, bude $T_{\alpha\beta} = 0$. Pokud předpokládáme, že takový prázdný vesmír nebude zakřiven, bude $R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta}$, $R_{\alpha\beta}$, i $R = 0$. Pak ale musí být i konstanta $c = 0$.

Význačnou vlastností tenzoru energie - hybnosti je $T^{\alpha\beta}_{;\beta} = 0$, tedy zachování energie a hybnosti. Tutéž rovnost musí ovšem splňovat i levá strana, což nakládá podmínku na zbývající konstanty a a b. Získáváme pak gravitační zákon ve tvaru: $R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}R.g_{\alpha\beta} = k.T_{\alpha\beta}$. Konstantu k zvolíme takovou, aby pro slabá pole přecházel obecně relativistický zákon v zákon Newtonův. Získáme tak Einsteinův gravitační zákon ve tvaru: [6]

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta} = \frac{8\pi G}{c^4}.T_{\alpha\beta}$$

Jako každý přírodní zákon je i tento pouhou hypotézou. Ačkoli byl již mnohokráte ověřen, [7] v budoucnu se vždy může stát, že bude experimentálně vyvrácen a posléze nahrazen ještě přesnějším zákonem. [8]

Reference

[1] Leoš Dvořák: *Obecná teorie relativity a moderní fyzikální obraz vesmíru*, SPN, Praha, 1984

[2] Tenzor energie a hybnosti na *Wikipedie - Otevřená encyklopedie* [online]. 17.5.2010 [cit. 19.9.2010]. Dostupné z www: <http://cs.wikipedia.org/wiki/Tenzor_energie_a_hybnosti>.

[3] Riemannův tenzor křivosti na *Wikipedie - Otevřená encyklopedie* [online]. 14.5.2010 [cit. 19.9.2010]. Dostupné z www: <http://cs.wikipedia.org/wiki/Riemannův_tenzor_křivosti>.

[4] Vladimír Wagner: *Přesnost atomových hodin, GPS a teorie relativity* [online]. Osel.cz, 19.01.2008, [cit. 20.9.2010]. Dostupný z www: <http://www.osel.cz/index.php?clanek=3225>.

[4] $R_{\alpha\beta\gamma\delta} = -R_{\beta\alpha\gamma\delta}$, $R_{\alpha\beta\gamma\delta} = -R_{\alpha\beta\delta\gamma}$, $R_{\alpha\beta\gamma\delta} = R_{\gamma\delta\alpha\beta}$, $R_{\alpha\beta\gamma\delta} + R_{\alpha\gamma\delta\beta} + R_{\alpha\delta\beta\gamma} = 0$. Dle [3].

[5] Tento požadavek je motivován pouze předpokladem, že výsledný zákon bude „krásný“. Můžeme uvažovat, jaké jsou důvody pro to, si to myslet. Nakonec nám opravdu vyjde zákon velmi jednoduchý a „krásný“ a hlavně - odpovídající realitě.

[6] G je gravitační konstanta, c je rychlost světla.

[7] Asi nejviditelnější skutečností podporující speciální i obecnou teorii relativity je fungování systému GPS. Nezapočítání zpomalení hodin na družici vlivem pohybu vůči Zemi by vedlo k chybě cca 50 metrů za hodinu. Nezapočítání zpomalení hodin na Zemi vlivem silnějšího gravitačního pole by vedlo k chybě cca 530 metrů za hodinu. Oba efekty se odčítají. Dle [4].

[8] Zpracováno dle [1, strany 60-77,92, 124-127,138-141]