Kosmologie

Pavel Provinský

5. února 2013

Nyní již máme připraveny nástroje a můžeme se pustit do zkoumání. Podívejme se na jeden problém obecné teorie relativity, na problém celého vesmíru. Jak může náš vesmír globálně vypadat?

Budeme předpokládat, že ve velkých měřítkách je vesmír homogenní a izotropní. [1] Za těchto předpokladů může mít prostor (teď mluvíme o prostoru, nikoli o prostoročasu) kladnou, nulovou nebo zápornou křivost. Budeme značit $k = +1, 0, -1$. Metrika takového prostoru bude dána prostorovým intervalem ve sférických souřadnicích tvaru $dl^2 = a(t)^2 \left[d\chi^2 + \Sigma^2 \left(d\Theta^2 + \sin^2\Theta d\varphi^2\right)\right]$, kde a je délkový parametr závislý pouze na čase, χ je bezrozměrná souřadnice v radiálním směru, Θ a φ jsou úhly. Výraz Σ je různý podle křivosti prostoru:

$$\Sigma = \begin{array}{cl} \sin\chi & \text{pro } k=1 \\ \chi & \text{pro } k=0 \\ \sinh\chi & \text{pro } k=-1 \end{array}$$

Časovou souřadnicí bude čas t. Máme tedy daný metrický tenzor:

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2\Sigma^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2\Sigma^2\sin^2\Theta \end{pmatrix}$$

Odtud spočteme Christoffelovy koeficienty ($i = 1, 2, 3$; nesčítá se; $\dot{a}=\frac{da}{dt}$; $\Sigma' = \frac{d\Sigma}{d\chi}$):

$$\Gamma^0_{ii} = \frac{1}{c^2} g_{ii}\frac{\dot{a}}{a} \qquad \Gamma^i_{0i} = \frac{\dot{a}}{a} \qquad \Gamma^2_{12} = \Gamma^3_{13} = \frac{\Sigma'}{\Sigma} \qquad \Gamma^3_{23} = \mathrm{cotg}\Theta$$

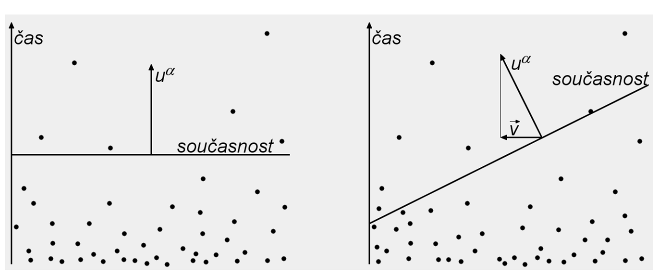
$$\Gamma^1_{22} = -\Sigma\Sigma' \qquad \Gamma^1_{33} = -\Sigma\Sigma'\sin^2\Theta \qquad \Gamma^2_{33} = -\sin\Theta\cos\Theta \qquad \text{ostatní nulové}$$

Dále spočteme složky Riemannova tenzoru:

$$R_{0i0i} = -g_{ii}\frac{\ddot{a}}{a} \qquad R_{ijij} = g_{ii}g_{jj}\left[\frac{1}{c^2}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 - \frac{1}{a^2}\frac{\Sigma''}{\Sigma}\right] \qquad \text{ostatní nulové}$$

Složky Ricciho tenzoru ($k = -\frac{\Sigma''}{\Sigma} = 0, \pm 1$):

[1] Tento předpoklad má jeden nečekaný důsledek. Jak si za chvíli ukážeme, homogenní a izotropní vesmír (s nulovou kosmologickou konstantou) se musí rozpínat nebo smršťovat. Takový vesmír ovšem preferuje jednu souřadnou soustavu, totiž právě tu, v níž homogenní a izotropní je. V soustavách vůči této se pohybujících totiž vesmír již homogenní a izotropní není. Jak je to možné, ukazuje následující obrázek. V první části je soustava v klidu vůči „kosmologické tekutině“ v druhé se vůči ní pohybuje rychlostí $\vec{v}$. Pak vidíme, že vpředu je vesmír hustší a vzadu řidší. Protože i reliktní záření bude mít vpředu fialový a vzadu rudý posuv, můžeme náš pohyb vůči kosmologické tekutině měřit. Podle [1, strana 343] se patrně Slunce pohybuje směrem k souhvězdí Lva rychlostí cca 300 km/h. Vidíme, že teorie relativity nakonec kupodivu vede (alespoň v rámci námi viděného vesmíru) k preferovanému systému souřadnic.



$$R^0_0 = \frac{3}{c^2}\frac{\ddot{a}}{a} \qquad R^1_1 = R^2_2 = R^3_3 = \left[\frac{1}{c^2}\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{2}{c^2}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{2}{a^2}k\right] \qquad \text{ostatní nulové}$$

Skalární křivost:

$$R = R^\alpha_\alpha = 6\left[\frac{1}{c^2}\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{1}{c^2}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2}\right]$$

Einsteinův tenzor $G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta}$:

$$G^0_0 = -\frac{3}{c^2}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 - \frac{3k}{a^2} \qquad G^1_1 = G^2_2 = G^3_3 = -\frac{2}{c^2}\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{1}{c^2}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 - \frac{k}{a^2} \qquad \text{ostatní nulové}$$

Máme tedy levou stranu Einsteinovy rovnice pro homogenní a izotropní vesmír. Jak bude vypadat tenzor energie - hybnosti na pravé straně?

Považujme hmotu vesmíru za koherentní neinteragující prach. Pak bude

$$T^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ a } T^\alpha_\gamma = T^{\alpha\beta}g_{\beta\gamma} = \begin{pmatrix} -c^2\rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Einsteinova rovnice tedy dává:

$$\begin{pmatrix} -\frac{3}{c^2}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 - \frac{3k}{a^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{c^2}\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{1}{c^2}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 - \frac{k}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{c^2}\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{1}{c^2}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 - \frac{k}{a^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{c^2}\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{1}{c^2}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 - \frac{k}{a^2} \end{pmatrix} = \frac{8\pi G}{c^4}.\begin{pmatrix} -c^2\rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Získáváme tedy dvě diferenciální rovnice pro parametr a:

$$\frac{1}{c^2}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3c^2}\rho$$

$$\frac{2}{c^2}\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2} = 0$$

Jak spolu souvisí hustota ρ a parametr a? Při dvojnásobném zvětšení a se každý objemový dílek zvětší 2^3- krát. Hustota hmoty tedy poklesne také 2^3- krát. Tedy $\rho = \rho_0.\left(\frac{a_0}{a}\right)^3$. První z našich diferenciálních rovnic můžeme tedy přepsat: [2]

$$\dot{a}^2 + kc^2 = \frac{8\pi G\rho_0 a_0^3}{3}.\frac{1}{a}$$

Řešením jsou:

$$k = 1 \qquad a(\eta) = \frac{4\pi G\rho_0 a_0^3}{3c^2}(1 - \cos\eta) \qquad t(\eta) = \frac{4\pi G\rho_0 a_0^3}{3c^3}(\eta - \sin\eta) \qquad \eta \in \langle 0, 2\pi\rangle$$

$$k = 0 \qquad a(t) = a_0\left(6\pi G\rho_0\right)^{\frac{1}{3}} t^{\frac{2}{3}}$$

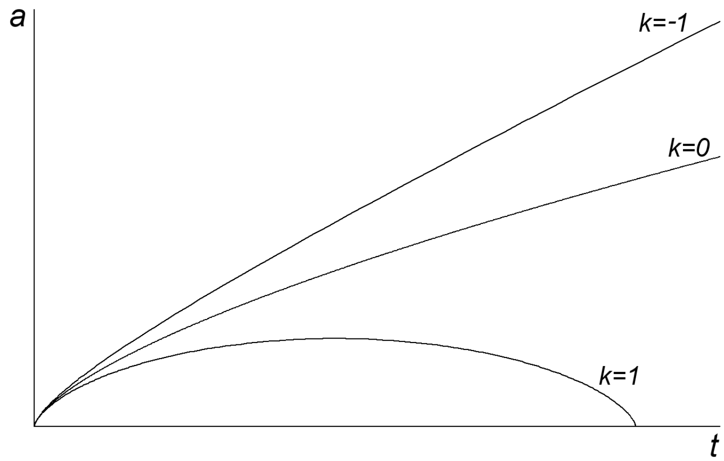
$$k = -1 \qquad a(\eta) = \frac{4\pi G\rho_0 a_0^3}{3c^2}(\cosh\eta - 1) \qquad t(\eta) = \frac{4\pi G\rho_0 a_0^3}{3c^3}(\sinh\eta - \eta) \qquad \eta \in \langle 0, \infty\rangle$$

První řešení pro Riemannův prostor je parametricky zadaná cykloida. Takovýto svět tedy expanduje z nuly, jeho konečný objem se nejprve zvětšuje, pak zmenšuje, nakonec v konečném čase $t = \frac{8\pi^2 G\rho_0 a_0^3}{3c^3}$ končí v nule.

Druhé řešení ukazuje „kynutí“ euklidovského prostoru podle mocninné funkce. Prostor je od samého počátku prostorově aktuálně nekonečný, vzdálenosti v něm však i přesto stále rostou. Růst parametru $\frac{da}{dt}$ se limitně blíží nule.

[2] Stačí řešit tuto rovnici. Řešení pak vyhovuje i rovnici druhé.

Třetí řešení je Lobačevského svět. Od okamžiku stvoření je nekonečný, vzdálenosti v něm také rostou. Růst parametru $\frac{da}{dt}$ se limitně blíží c. [3]



Obrázek 1: Tři možné scénáře expanze vesmíru

Je fascinující, že ani obecná teorie relativity nedokáže odpovědět na dávnou otázku Giordana Bruna: Je vesmír opravdu aktuálně nekonečný, či ne? Je celé to naše nebe s miliardami hvězd jen nekonečně malým práškem v rozloze skutečnosti? Teorie připouští možnosti obě a experimenty dosud také nedokáží rozhodnout. [4]

Reference

[1] Leoš Dvořák: *Obecná teorie relativity a moderní fyzikální obraz vesmíru*, SPN, Praha, 1984

[3] Kromě těchto tří Friedmannových modelů existují možnosti další, pokud připustíme nenulovou kosmologickou konstantu λ. Tu do rovnice $R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta} + \lambda.g_{\alpha\beta} = \frac{8\pi G}{c^4}$. Einstein původně zavedl proto, aby získal statický model vesmíru. (Vidíme, že ani jeden z Friedmannových modelů statický není.) Rozpínání vesmíru bylo zjištěno až později.

Naše úvahy při odvozování zákona budou při nenulové kosmologické konstantě narušeny jen v tom bodě, že nebudeme požadovat, aby prázdný vesmír nebyl zakřiven. Einsteinův gravitační zákon pak ovšem nepřejde v zákon Newtonův. Odchylky však narůstají se vzdáleností, takže při malé kladné či záporné konstantě by odchylky nebyly např. v rámci galaxie ještě měřitelné.

[4] Dle [1, strany 300, 394-395, 311-321].