Černá díra

Pavel Provinský

4. března 2013

Nezakřivené sférické souřadnice

Využijme získané poznatky na jednom velmi zajímavém příkladě, totiž výpočtu černé díry. Budeme uvažovat tzv. Schwarzschildovu černou díru, tedy díru nerotující a bez elektrického náboje. Situace tedy bude sféricky symetrická. Podívejme se nejprve, jak se pracuje s obyčejnými sférickými souřadnicemi v nezakřiveném prostoru. Zaveďme si kartézské $(x, y, z) = (\xi^1, \xi^2, \xi^3)$ a sférické $(r, \varphi, \theta) = (x^1, x^2, x^3)$ souřadnice.

Sférické souřadnice :

$$\begin{array}{rclcc} x^1 & = & r & \ldots & \text{poloměr} \\ x^2 & = & \varphi & \ldots & \text{zeměpisná šířka} \\ x^3 & = & \theta & \ldots & \text{zeměpisná délka} \end{array}$$

Počátky obou souřadných soustav splývají. Pak mezi kartézskými (ξ^1, ξ^2, ξ^3) a sférickými (x^1, x^2, x^3) souřadnicemi platí tento vztah:

$$\begin{aligned} \xi^1 &= r.\cos\theta.\cos\varphi \\ \xi^2 &= r.\cos\theta.\sin\varphi \\ \xi^3 &= r.\sin\theta \end{aligned}$$

... respektive ...

$$\begin{aligned} \xi^1 &= x^1.\cos x^3.\cos x^2 \\ \xi^2 &= x^1.\cos x^3.\sin x^2 \\ \xi^3 &= x^1.\sin x^3 \end{aligned}$$

Pro malou vzdálenost dl platí Pythagorova věta:

$$dl^2 = \left(d\xi^1\right)^2 + \left(d\xi^2\right)^2 + \left(d\xi^3\right)^2 = J_{ab}.d\xi^a.d\xi^b,$$

kde

$$J_{ab} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Protože $d\xi^a = \frac{\partial \xi^a}{\partial x^b}.dx^b$, (pozor - sumační konvence), můžeme psát:

$$dl^2 = J_{ab}.d\xi^a.d\xi^b = J_{ab}.\frac{\partial \xi^a}{\partial x^c}.dx^c.\frac{\partial \xi^b}{\partial x^d}.dx^d = \left(J_{ab}.\frac{\partial \xi^a}{\partial x^c}.\frac{\partial \xi^b}{\partial x^d}\right).dx^c.dx^d = g_{cd}.dx^c.dx^d$$

Konkrétní podobu g_{cd} spočteme sice zdlouhavě, ale snadno. Např.:

$$\begin{aligned} g_{11} &= J_{ab}.\frac{\partial \xi^a}{\partial x^1}.\frac{\partial \xi^b}{\partial x^1} = \\ &= J_{11}.\frac{\partial \xi^1}{\partial x^1}.\frac{\partial \xi^1}{\partial x^1} + J_{12}.\frac{\partial \xi^1}{\partial x^1}.\frac{\partial \xi^2}{\partial x^1} + J_{13}.\frac{\partial \xi^1}{\partial x^1}.\frac{\partial \xi^3}{\partial x^1} + J_{21}.\frac{\partial \xi^2}{\partial x^1}.\frac{\partial \xi^1}{\partial x^1} + J_{22}.\frac{\partial \xi^2}{\partial x^1}.\frac{\partial \xi^2}{\partial x^1} + J_{23}.\frac{\partial \xi^2}{\partial x^1}.\frac{\partial \xi^3}{\partial x^1} + J_{31}.\frac{\partial \xi^3}{\partial x^1}.\frac{\partial \xi^1}{\partial x^1} + \ldots \\ &= 1.\cos\theta.\cos\varphi.\cos\theta.\cos\varphi + 0 + 0 + 0 + 1.\cos\theta.\sin\varphi.\cos\theta.\sin\varphi + 0 + 0 + 0 + 1.\sin\theta.\sin\theta \\ &= \cos^2\theta.\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) + \sin^2\theta = 1 \end{aligned}$$

Tímto způsobem získáme tenzor:

$$g_{ab} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2\cos^2\theta & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \end{pmatrix}$$

Vzdálenost ve sférických souřadnicích tedy počítáme: $dl^2 = dr^2 + r^2\cos^2\theta.d\varphi^2 + r^2 d\theta^2$.

Metrický tenzor pro sféricky symetrickou situaci

Povzbuzeni úspěchem se pokusme o výpočet metriky černé díry. Napišme si obecný metrický tenzor. Tenzor je symetrický, první složka je časová:

$$g_{\alpha\beta}(t,r,\varphi,\theta) = \begin{pmatrix} A & E & H & J \\ E & B & F & I \\ H & F & C & G \\ J & I & G & D \end{pmatrix},$$

kde $A, B, \ldots J$ jsou funkce t, r, φ, θ.

Situace je kulově symetrická. Vzdálenost by se proto neměla změnit, pokud úhly φ resp. θ budeme počítat po nebo proti směru hodinových ručiček (tedy pokud místo $d\varphi$ resp. $d\theta$ budeme počítat s $-d\varphi$ resp. $-d\theta$). Z toho okamžitě plyne, že H, F, J, I, G musí být nulové. (Protože např. člen $G.d\varphi.d\theta$ by při záměně $d\varphi \to -d\varphi$ změnil znaménko.)

Situace je kulově symetrická. Metrika na kulové ploše pro konstantní t a r by proto měla odpovídat situaci na kulové ploše s nějakým poloměrem R. Jaký je vztah mezi R na jedné straně a r a t na straně druhé, zatím nevíme. Metriku na kulové ploše opíšeme z tenzoru g_{ab} z minulé kapitolky. Náš metrický tenzor pro kulově symetrickou situaci zatím vypadá takto:

$$g_{\alpha\beta}(t,r,\varphi,\theta) = \begin{pmatrix} A & E & 0 & 0 \\ E & B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R^2\cos^2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R^2 \end{pmatrix}$$

Souřadnice r je zatím libovolná veličina, která jednoznačně určuje, kterou kulovou plochu máme na mysli. (Nemůžeme ji apriori chápat jako „vzdálenost" od středu, protože jak měřit vzdálenost nám ukáže až metrický tenzor.) Předpokládejme, že tuto vlastnost má i R a volme ze všech možných voleb souřadnici r právě tak, aby $r = R$, kde R nějaké kulové plochy můžeme definovat např. jako obvod hlavní kružnice dělený 2π (nebo odmocninu z povrchu kulové plochy dělenou 4π).

Souřadnice t je zatím libovolná veličina, která jednoznačně určuje časové okamžiky. Čas ubíhá pro různé skutečné i myšlené částice různě se pohybující v okolí černé díry různě. Máme tedy na výběr mnoho různých časů. Tuto nejednoznačnost využijeme k tomu, že zvolíme právě takové t, aby člen E byl nulový. Čili čas t budeme postupně konkretizovat tak, aby se nám s ním dobře počítalo a teprve, až bude metrický tenzor hotový, budeme se ptát, jaký má právě takovýto čas fyzikální smysl.

S nějakou obecnou souřadnicí t zatím naše metrika vypadá takto:

$$\begin{aligned} ds^2 &= A.dt^2 + 2E.dt.dR + B.dR^2 + R^2\cos^2\theta.d\varphi^2 + R^2 d\theta^2 \\ &= A.\left(dt^2 + 2.\frac{E}{A}.dR.dt + \left(\frac{E}{A}.dR\right)^2\right) - \frac{E^2}{A}.dR^2 + B.dR^2 + R^2\cos^2\theta.d\varphi^2 + R^2 d\theta^2 \\ &= A.\left(dt + \frac{E}{A}.dR\right)^2 + \left(B - \frac{E^2}{A}\right).dR^2 + R^2\cos^2\theta.d\varphi^2 + R^2 d\theta^2 \end{aligned}$$

Zvolme novou veličinu T tak, aby platilo: $dT = dt + \frac{E}{A}.dR$. Nechť tato veličina charakterizuje čas (A je záporné) a veličina R nechť charakterizuje prostorový rozměr ($B - \frac{E^2}{A}$ je kladné). Pak naše metrika má v souřadnicích T, R, φ, θ tvar:

$$g_{\alpha\beta}(T,R,\varphi,\theta) = \begin{pmatrix} K & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R^2\cos^2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R^2 \end{pmatrix},$$

kde K a L jsou nějaké funkce. Protože situace je sféricky symetrická, nemohou funkce K a L záviset na úhlech φ a θ. K a L jsou tedy pouze funkcí T a R.

Dosazení do Einsteinova gravitačního zákona

Předpokladem o sférické symetrii se nám metrický tenzor radikálně zjednodušil. Abychom mohli dále konkretizovat funkce K a L, musíme dosadit do Einsteinova gravitačního zákona.

Začneme tím, že funkce K a L přepíšeme do tvaru: $K = -c^2.e^{2\Phi}$ a $L = e^{2\Lambda}$. Jediným důvodem je, že se nám tak bude lépe počítat.

Dále spočteme 64 Christoffelových symbolů dle rovnice:

$$\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} \left(-g_{\mu\nu,\sigma} + g_{\sigma\mu,\nu} + g_{\nu\sigma,\mu} \right)$$

Dále spočteme 256 složek Riemannova tenzoru dle rovnice:

$$R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} = \Gamma^{\alpha}_{\beta\delta,\gamma} - \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma,\delta} + \Gamma^{\rho}_{\beta\delta}\Gamma^{\alpha}_{\rho\gamma} - \Gamma^{\rho}_{\beta\gamma}\Gamma^{\alpha}_{\rho\delta}$$

Dále spočteme 16 složek Ricciho tenzoru dle rovnice:

$$R_{\alpha\beta} = R^{\rho}_{\alpha\rho\beta}$$

Dále spočteme skalární křivost dle rovnice:

$$R = R^{\alpha}_{\alpha}$$

Dále spočteme Einsteinův tenzor na levé straně gravitačního zákona dle rovnice:

$$G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g_{\alpha\beta}$$

Výpočet je sice přímočarý, ale dost zdlouhavý. [1]

Práci nám značně ušetří různé symetrie. Např. Riemannův tenzor má jen 20 nezávislých složek.

Uveďme pouze výsledné složky Einsteinova tenzoru:

$$\begin{aligned} G_{00} &= -c^2.e^{2\Phi}.\frac{1}{R^2}.\left[e^{-2\Lambda}.\left(1 - 2R\Lambda'\right) - 1 \right] \\ G_{11} &= e^{2\Lambda}.\frac{1}{R^2}.\left[e^{-2\Lambda}.\left(1 + 2R\Phi'\right) - 1 \right] \end{aligned}$$

---

[1] Jako příklad těchto výpočtů si spočteme Γ^1_{01}. K výpočtu budeme potřebovat matici $g^{\alpha\beta}$, která je inverzní k matici $g_{\alpha\beta}$. Tedy

$$g_{\alpha\beta}\left(T,R,\varphi,\theta\right) = \begin{pmatrix} K & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R^2\cos^2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R^2 \end{pmatrix} \quad \dots \quad g^{\alpha\beta}\left(T,R,\varphi,\theta\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{K} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{R^2\cos^2\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{R^2} \end{pmatrix}$$

K výpočtu Γ^1_{01} použijeme vzorec:

$$\begin{aligned} \Gamma^1_{01} &= \frac{1}{2} g^{1\sigma} \left(-g_{01,\sigma} + g_{\sigma 0,1} + g_{1\sigma,0} \right) \\ &= \frac{1}{2} g^{10} \left(-g_{01,0} + g_{00,1} + g_{10,0} \right) + \frac{1}{2} g^{11} \left(-g_{01,1} + g_{10,1} + g_{11,0} \right) + \frac{1}{2} g^{12} \left(-g_{01,2} + g_{20,1} + g_{12,0} \right) + \frac{1}{2} g^{13} \left(-g_{01,3} + g_{30,1} + g_{13,0} \right) \end{aligned}$$

Protože g^{10}, g^{12} i g^{13} jsou nulové, zůstane nám pouze druhý člen.

$$\Gamma^1_{01} = \frac{1}{2} g^{11} \left(-g_{01,1} + g_{10,1} + g_{11,0} \right)$$

Protože g_{01} i g_{10} jsou nulové, budou i jejich derivace podle souřadnice R nulové. Výraz se nám proto zjednodušil na:

$$\begin{aligned} \Gamma^1_{01} &= \frac{1}{2} g^{11}.g_{11,0} \\ &= \frac{1}{2}.\frac{1}{L}.\frac{\partial L}{\partial T} \\ &= \frac{1}{2}.\frac{1}{e^{2\Lambda}}.\frac{\partial e^{2\Lambda}}{\partial T} \\ &= \frac{1}{2}.\frac{1}{e^{2\Lambda}}.e^{2\Lambda}.2.\dot{\Lambda} \\ &= \dot{\Lambda} \end{aligned}$$

Tečka znamená derivaci podle T.

$$\begin{aligned}
G_{22} &= -\frac{R^2}{c^2}.e^{-2\Phi}.\left[\ddot{\Lambda}+\dot{\Lambda}^2-\dot{\Lambda}\dot{\Phi}\right]+R^2e^{-2\Lambda}.\left[\Phi''+\Phi'^2-\Phi'\Lambda'+\frac{1}{R}\left(\Phi'-\Lambda'\right)\right] \\
G_{33} &= G_{22}.\sin^2\theta \\
G_{01}=G_{10} &= \frac{2}{R}.\dot{\Lambda}
\end{aligned}$$

Tečky znamenají derivaci podle T, čárky derivaci podle R.

Vesmír kolem černé díry předpokládáme zcela prázdný. Tedy nulová je hustota energie, hybnost hmoty i tlaky. Na pravé straně tedy máme nulový tenzor. Získali jsme tedy těchto pět parciálních diferenciálních rovnic druhého řádu pro dvě neznámé funkce $\Lambda(R,T)$ a $\Phi(R,T)$:

$$\begin{aligned}
-c^2.e^{2\Phi}.\frac{1}{R^2}.\left[e^{-2\Lambda}.\left(1-2R\Lambda'\right)-1\right] &= 0 \\
e^{2\Lambda}.\frac{1}{R^2}.\left[e^{-2\Lambda}.\left(1+2R\Phi'\right)-1\right] &= 0 \\
-\frac{R^2}{c^2}.e^{-2\Phi}.\left[\ddot{\Lambda}+\dot{\Lambda}^2-\dot{\Lambda}\dot{\Phi}\right]+R^2e^{-2\Lambda}.\left[\Phi''+\Phi'^2-\Phi'\Lambda'+\frac{1}{R}\left(\Phi'-\Lambda'\right)\right] &= 0 \\
G_{22}.\sin^2\theta &= 0 \\
\frac{2}{R}.\dot{\Lambda} &= 0
\end{aligned}$$

Řešení rovnic

Až sem jsme dospěli postupem sice dlouhým, ale víceméně mechanickým. Následuje vyřešení získané soustavy rovnic, což může být někdy velmi tvrdý oříšek. Naštěstí v tomto případě to až tak těžké nebude.

Pokud je splněna třetí rovnice, je čtvrtá rovnice splněna automaticky. Proto ji vynecháme. Zbudou čtyři rovnice. Dále vydělme faktory, o kterých předpokládáme, že jsou nenulové. :

$$\begin{aligned}
e^{-2\Lambda}.\left(1-2R\Lambda'\right)-1 &= 0 \\
e^{-2\Lambda}.\left(1+2R\Phi'\right)-1 &= 0 \\
-\frac{R^2}{c^2}.e^{-2\Phi}.\left[\ddot{\Lambda}+\dot{\Lambda}^2-\dot{\Lambda}\dot{\Phi}\right]+R^2e^{-2\Lambda}.\left[\Phi''+\Phi'^2-\Phi'\Lambda'+\frac{1}{R}\left(\Phi'-\Lambda'\right)\right] &= 0 \\
\dot{\Lambda} &= 0
\end{aligned}$$

Ze čtvrté rovnice plyne, že funkce Λ nezávisí na čase T a je tedy funkcí pouze R:

$$\Lambda = \Lambda(R)$$

Tedy první rovnice je vlastně diferenciální rovnicí prvního řádu v jedné proměnné R. Rovnice je separovatelná, tedy ji snadno za pomoci několika substitucí vyřešíme. Řešením je:

$$\Lambda = \frac{1}{2}\ln\frac{1}{1-\frac{k}{R}},$$

kde k je libovolná konstanta. Dosazením zjistíme složku L:

$$L = e^{2\Lambda} = \frac{1}{1-\frac{k}{R}}$$

Hurá! Ze čtvrté a první rovnice jsme spočetli, až na konstantu, předposlední složku metrického tenzoru.

Nyní odečtěme první a druhou rovnici. Zjistíme, že $\Lambda'+\Phi'=0$, tedy $(\Lambda+\Phi)'=0$, tedy $\Lambda+\Phi=f(T)$, kde $f(T)$ nezávisí na R a je nějakou funkcí pouze času T.

Z první a druhé rovnice jsme zjistili, že

$$\Phi = f(T)-\Lambda = f(T)-\frac{1}{2}\ln\frac{1}{1-\frac{k}{R}},$$

Zbývá nám třetí rovnice. Celý první člen je roven nule. Podělíme výrazem $R^2 e^{-2\Lambda}$ a do hranaté závorky dosadíme Λ', Φ' a Φ''. Zjistíme, že třetí rovnice je již automaticky splněna a proto ji nemusíme uvažovat.

Výpočet se nám úspěšně chýlí ke konci, v poslední neznámé složce K nám však stále zbývá neznámá funkce $f(T)$:

$$K = -c^2.e^{2\Phi} = -c^2.e^{2.\left[f(T)-\frac{1}{2}\ln\frac{1}{1-\frac{k}{R}}\right]} = -c^2.e^{2f(T)}.\left(1-\frac{k}{R}\right)$$

Metrika tedy zatím vypadá takto:

$$\begin{aligned} ds^2 &= -c^2.e^{2f(T)}.\left(1-\frac{k}{R}\right).dT^2 + \frac{1}{1-\frac{k}{R}}.dR^2 + R^2\cos^2\theta.d\varphi^2 + R^2 d\theta^2 \\ &= -c^2.\left(1-\frac{k}{R}\right).\left(e^{f(T)}.dT\right)^2 + \frac{1}{1-\frac{k}{R}}.dR^2 + R^2\cos^2\theta.d\varphi^2 + R^2 d\theta^2 \end{aligned}$$

Druhý přepis nám ukazuje, že pokud místo časové souřadnice T použijeme časovou souřadnici T', takovou, že $dT' = e^{f(T)}.dT$, metrika se nám zjednoduší na pěkný tvar:

$$ds^2 = -c^2.\left(1-\frac{k}{R}\right).dT'^2 + \frac{1}{1-\frac{k}{R}}.dR^2 + R^2\cos^2\theta.d\varphi^2 + R^2 d\theta^2$$

Provedli jsme tedy již druhou konkretizaci času.

Pro souřadnice $x^\alpha = (T', R, \varphi, \theta)$ dostáváme metrický tenzor:

$$g_{\alpha\beta}\left(T', R, \varphi, \theta\right) = \begin{pmatrix} -c^2.\left(1-\frac{k}{R}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1-\frac{k}{R}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R^2\cos^2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R^2 \end{pmatrix}$$

Interpretace T'

Během odvozování jsme uvažovali několik různých časových souřadnic, až jsme dospěli k pro nás nejvýhodnější souřadnici T'. Jakou má tato souřadnice fyzikální interpretaci? Uvažujme astronauta, který je velmi daleko od černé díry ($R \to \infty$) a vůči našim souřadnicím se nepohybuje. Jeho metrika bude mít tvar:

$$ds^2 = -c^2.dT'^2$$

Vlastní čas je čas, který by měřil astronaut na svých hodinkách. Spočte se obecně jako: $d\tau = \frac{\sqrt{-ds^2}}{c}$, což v našem případě dává $d\tau = dT'$. Čas T' tedy odpovídá času, který by na svých hodinkách měřil astronaut, který se vůči černé díře nepohybuje a je od ní limitně vzálen v nekonečnu.

Výpočet konstanty k

Metriku máme spočtenu až na neznámou konstantu k. Tato konstanta bude patrně souviset s hmotností černé díry. Jak konstantu k spočítat? Základní myšlenka je velmi jednoduchá. Budeme předpokládat, že velmi daleko od černé díry bude zakřivení časoprostoru (=gravitační pole) tak slabé, že předpověďi Einsteinovy i Newtonovy teorie budou takřka totožné. Porovnáním obou předpovědí pak získáme neznámou konstantu.

Budeme uvažovat astronauta, který se vůči našim souřadnicím nepohybuje a který je od černé díry hodně vzdálen ($R \to \infty$). Čas $\tau = T'$ je jeho vlastní čas. Na tohoto astronauta bude působit dostředivé zrychlení $a = \frac{d^2R}{d\tau^2}$. Newtonowa teorie pro toto zrychlení dává:

$$a = -G.\frac{M}{R^2},$$

kde G je gravitační konstanta a M je hmotnost černé díry. R by v nezakřiveném prostoru odpovídalo vzdálenosti od černé díry.

Einsteinovské řešení získáme z rovnice volného pádu, se kterou jsme se již setkali v článcích „Souřadnice“ a „Horní a dolní indexy“:

$$\frac{Du^{\alpha}}{d\tau} = 0$$

$$\frac{d}{d\tau}\left(u^{\alpha}\right) + \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}.u^{\mu}.u^{\nu} = 0$$

Čtyřrychlost u^{α} je derivací polohového časoprostorového vektoru (T', R, φ, θ)podle vlastního času τ. Astronaut se na počátku děje vůči souřadnicím nepohybuje, tedy

$$u^{\alpha} = (1, 0, 0, 0)$$

Protože nás zajímá druhá derivace souřadnice R (tedy index 1), budeme řešit:

$$\frac{d}{d\tau}\left(u^{1}\right) + \Gamma^{1}_{\mu\nu}.u^{\mu}.u^{\nu} = 0$$

Druhý člen v sobě zahrnuje šestnáct součinů, z nichž jen jeden je nenulový. Řešíme tedy:

$$\frac{d}{d\tau}\left(u^{1}\right) + \Gamma^{1}_{00}.u^{0}.u^{0} = \frac{d}{d\tau}\left(u^{1}\right) + \Gamma^{1}_{00}.1^{2} = 0$$

K výpočtu Γ^{1}_{00} požijeme vzorec

$$\begin{aligned}
\Gamma^{1}_{00} &= \frac{1}{2}g^{1\sigma}\left(-g_{00,\sigma} + g_{\sigma 0,0} + g_{0\sigma,0}\right) \\
&= \frac{1}{2}g^{10}\left(-g_{00,0} + g_{00,0} + g_{00,0}\right) + \frac{1}{2}g^{11}\left(-g_{00,1} + g_{10,0} + g_{01,0}\right) + \frac{1}{2}g^{12}\left(-g_{00,2} + g_{20,0} + g_{02,0}\right) + \frac{1}{2}g^{13}\left(-g_{00,3} + g_{30,0} + g_{03,0}\right. \\
&= 0 + \frac{1}{2}g^{11}\left(-g_{00,1} + 0 + 0\right) + 0 + 0 \\
&= -\frac{1}{2}g^{11}.g_{00,1} \\
&= -\frac{1}{2}.\left(1 - \frac{k}{R}\right).\frac{d}{dR}\left(-\left(1 - \frac{k}{R}\right)\right) \\
&= -\frac{1}{2}.\left(1 - \frac{k}{R}\right).\left(-\frac{k}{R^{2}}\right) \\
&= \frac{1}{2}.\frac{k}{R^{2}}.\left(1 - \frac{k}{R}\right)
\end{aligned}$$

Máme tedy rovnici

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\tau}\left(u^{1}\right) + \frac{1}{2}.\frac{k}{R^{2}}.\left(1 - \frac{k}{R}\right).1^{2} &= 0 \\
\frac{d^{2}R}{d\tau^{2}} &= -\frac{1}{2}.\frac{k}{R^{2}}.\left(1 - \frac{k}{R}\right)
\end{aligned}$$

Pro velká R můžeme druhý člen v závorce zanedbat a dostáváme:

$$a = \frac{d^{2}R}{d\tau^{2}} \doteq -\frac{1}{2}.\frac{c^{2}k}{R^{2}}$$

Porovnáním Newtonova a Einsteinova výsledku získáváme:

$$-\frac{1}{2}.\frac{c^{2}k}{R^{2}} = -G.\frac{M}{R^{2}}$$

Tedy:

$$k = \frac{2GM}{c^{2}}$$

Závěr

Zjistili jsme, že metrika v prázdném vesmíru v okolí černé díry je dána rovnicí:

$$ds^2 = -c^2.\left(1 - \frac{2GM}{c^2.R}\right).dT'^2 + \frac{1}{1 - \frac{2GM}{c^2.R}}.dR^2 + R^2\cos^2\theta.d\varphi^2 + R^2 d\theta^2.$$

Příslušný metrický tenzor je:

$$g_{\alpha\beta}\left(T', R, \varphi, \theta\right) = \begin{pmatrix} -c^2.\left(1 - \frac{2GM}{c^2.R}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1-\frac{2GM}{c^2.R}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R^2\cos^2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R^2 \end{pmatrix}.$$

- c je rychost světla
- G je gravitační konstanta
- M je hmotnost černé díry
- φ je úhlová souřadnice (zeměpisná délka) - nabývá hodnot $0 \dots 2\pi$
- θ je úhlová souřadnice (zeměpisná šířka) - nabývá hodnot $-\frac{\pi}{2} \dots \frac{\pi}{2}$
- R je obvod hlavní kružnice dělený 2π - jakýsi zobecněný poloměr
- T' je čas, který měří na svých hodinkách nepohybující se pozorovatel limitně vzdálený v nekonečnu

Reference

[1] Leoš Dvořák: *Obecná teorie relativity a moderní fyzikální obraz vesmíru*, SPN, Praha, 1984