

Rozdělení N-tého členu a práce s tabulkami

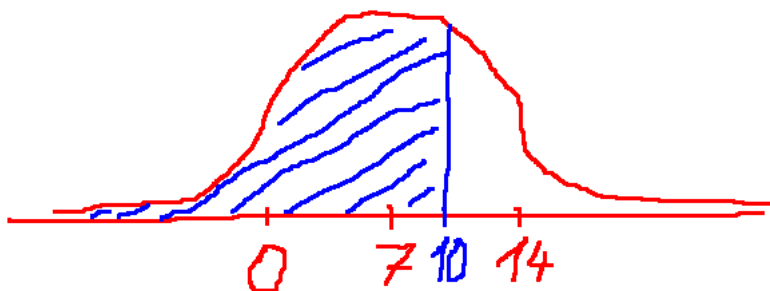
24. října 2013

1 Odhad pravděpodobnosti

Náhodná veličina má rozdělení $N(7, 50)$. Pravděpodobnost, že padne hodnota menší než 10 je:

- a) 36%
- b) 66%
- c) 98%

Zde stačí načrtnout obrázek:



Střední hodnota je sedm, směrodatná odchylka něco málo přes sedm. Směrodatná odchylka odpovídá místu, kde se graf mění z konkávního na konvexní. V těchto místech tedy vyznačím přibližné hodnoty 0 a 14. Vyznačím 10. Zajímá mne pravděpodobnost vlevo. Okamžitě vidím, že obsah pod křivkou je určitě větší než polovina, takže padá možnost za a). Napravo ale zbývá určitě více než dvě procenta, takže padá možnost za c). Vyhrává možnost b).

2 Vyhledání pravděpodobnosti v tabulkách

Náhodná veličina má rozdělení $N(-9, 15)$. Jaká je pravděpodobnost, že padne:

- a) hodnota menší než 0?
- b) hodnota větší než -5?
- c) hodnota menší než -10?
- d) hodnota mezi -12 a -2?

Provedu normalizaci:

$$x \sim N(-9, 15)$$

$$x + 9 \sim N(0, 15)$$

$$z = \frac{x + 9}{\sqrt{15}} \sim N(0, 1)$$

a) Dosadím mezní x a příslušné z najdu v tabulce (modře):

$$z = \frac{0 + 9}{\sqrt{15}} = 2,32.$$

Pravděpodobnost, že padne hodnota menší než 0 je 99%.

Distribuční funkce normálního rozdělení

$$\Phi(u) = \int_{-\infty}^u \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

u	$\Phi(u)$	u	$\Phi(u)$	u	$\Phi(u)$	u	$\Phi(u)$	u	$\Phi(u)$	u	$\Phi(u)$	u	$\Phi(u)$	u	$\Phi(u)$
0.00	0,50000	0,40	0,65542	0,80	0,78814	1,20	0,88493	1,60	0,94520	2,00	0,97725	2,40	0,99180	3,10	0,99903
0.01	50399	0,41	65910	0,81	79103	1,21	88686	1,61	94630	2,01	97778	2,41	99202	3,11	99910
0.02	50798	0,42	66276	0,82	79389	1,22	88877	1,62	94738	2,02	97831	2,42	99224	3,14	99916
0.03	51197	0,43	66640	0,83	79673	1,23	89065	1,63	94845	2,03	97882	2,43	99245	3,16	99921
0.04	51595	0,44	67003	0,84	79955	1,24	89251	1,64	94950	2,04	97932	2,44	99266	3,18	99926
0.05	51994	0,45	67364	0,85	80234	1,25	89435	1,65	95053	2,05	97982	2,45	99286	3,20	99931
0.06	52392	0,46	67724	0,86	80511	1,26	89617	1,66	95154	2,06	98030	2,46	99305	3,22	99936
0.07	52790	0,47	68082	0,87	80785	1,27	89796	1,67	95254	2,07	98077	2,47	99324	3,24	99940
0.08	53188	0,48	68439	0,88	81057	1,28	89973	1,68	95352	2,08	98124	2,48	99343	3,26	99944
0.09	53586	0,49	68793	0,89	81327	1,29	90147	1,69	95449	2,09	98169	2,49	99361	3,28	99948
0.10	53983	0,50	69146	0,90	81594	1,30	90320	1,70	95543	2,10	98214	2,50	99379	3,30	99952
0.11	54380	0,51	69497	0,91	81859	1,31	90490	1,71	95637	2,11	98257	2,52	99413	3,32	99955
0.12	54776	0,52	69847	0,92	82121	1,32	90658	1,72	95728	2,12	98300	2,54	99446	3,34	99958
0.13	55172	0,53	70194	0,93	82381	1,33	90824	1,73	95818	2,13	98341	2,56	99477	3,36	99961
0.14	55567	0,54	70540	0,94	82639	1,34	90988	1,74	95907	2,14	98382	2,58	99506	3,38	99964
0.15	55962	0,55	70884	0,95	82894	1,35	91149	1,75	95994	2,15	98422	2,60	99534	3,40	99966
0.16	56356	0,56	71226	0,96	83147	1,36	91309	1,76	96080	2,16	98461	2,62	99560	3,42	99969
0.17	56749	0,57	71566	0,97	83398	1,37	91466	1,77	96164	2,17	98500	2,64	99585	3,44	99971
0.18	57142	0,58	71904	0,98	83646	1,38	91621	1,78	96246	2,18	98537	2,66	99609	3,46	99973
0.19	57535	0,59	72240	0,99	83891	1,39	91774	1,79	96327	2,19	98574	2,68	99632	3,48	99975
0.20	57926	0,60	72575	1,00	84134	1,40	91924	1,80	96407	2,20	98610	2,70	99653	3,50	99977
0.21	58318	0,61	72907	1,01	84375	1,41	92073	1,81	96485	2,21	98645	2,72	99674	3,55	99981
0.22	58706	0,62	73237	1,02	84614	1,42	92220	1,82	96562	2,22	98679	2,74	99693	3,60	99984
0.23	58995	0,63	73565	1,03	84850	1,43	92364	1,83	96638	2,23	98713	2,76	99711	3,65	99987
0.24	59483	0,64	73891	1,04	85083	1,44	92507	1,84	96712	2,24	98745	2,78	99728	3,70	99989
0.25	59871	0,65	74215	1,05	85314	1,45	92647	1,85	96784	2,25	98778	2,80	99744	3,75	99991
0.26	60257	0,66	74537	1,06	85543	1,46	92786	1,86	96856	2,26	98809	2,82	99760	3,80	99993
0.27	60642	0,67	74857	1,07	85769	1,47	92922	1,87	96926	2,27	98840	2,84	99774	3,85	99994
0.28	61026	0,68	75175	1,08	85993	1,48	93056	1,88	96995	2,28	98870	2,86	99788	3,90	99995
0.29	61409	0,69	75490	1,09	86214	1,49	93189	1,89	97062	2,29	98899	2,88	99801	3,95	99996
0.30	61791	0,70	75804	1,10	86433	1,50	93319	1,90	97128	2,30	98928	2,90	99813	4,00	99997
0.31	62172	0,71	76115	1,11	86650	1,51	93448	1,91	97193	2,31	98956	2,92	99825	4,05	99997
0.32	62552	0,72	76424	1,12	86864	1,52	93574	1,92	97257	2,32	98983	2,94	99836	4,10	99998
0.33	62930	0,73	76730	1,13	87076	1,53	93699	1,93	97320	2,33	99010	2,96	99846	4,15	99998
0.34	63307	0,74	77035	1,14	87286	1,54	93822	1,94	97381	2,34	99036	2,98	99856	4,20	99999
0.35	63683	0,75	77337	1,15	87493	1,55	93943	1,95	97441	2,35	99061	3,00	99865	4,25	99999
0.36	64058	0,76	77637	1,16	87698	1,56	94062	1,96	97500	2,36	99086	3,02	99874	4,30	99999
0.37	64431	0,77	77935	1,17	87900	1,57	94179	1,97	97558	2,37	99111	3,04	99882	4,35	99999
0.38	64803	0,78	78230	1,18	88100	1,58	94295	1,98	97615	2,38	99134	3,06	99890	4,40	99999
0.39	65173	0,79	78524	1,19	88298	1,59	94408	1,99	97670	2,39	99158	3,08	99897	4,45	1,00000

b) Dosadím mezní x a příslušné z najdu v tabulce (zeleně):

$$z = \frac{-5 + 9}{\sqrt{15}} = 1,03.$$

Nalezená hodnota ale udává pravděpodobnost vlevo. Nás zajímá pravděpodobnost vpravo. Proto musíme vzít zbytek do jedničky:

$$1 - 0,8485 = 0,1515.$$

Pravděpodobnost, že padne hodnota větší než -5 je 15%.

c) Dosadím mezní x :

$$z = \frac{-10 + 9}{\sqrt{15}} = -0,26.$$

Hodnota je záporná, v tabulce jsou ale uvedeny jen hodnoty pro kladnou polovinu grafu. Musíme tedy použít úvahu, že pravděpodobnost, že z bude menší než $-0,26$ je stejná, jako pravděpodobnost, že z bude větší než $+0,26$. (Graf je symetrický podle nuly.) Řešíme tedy tuto druhou variantu. Příslušné z najdu v tabulce (fialově). Opět musím použít zbytek do jedničky:

$$1 - 0,60257 = 0,39743.$$

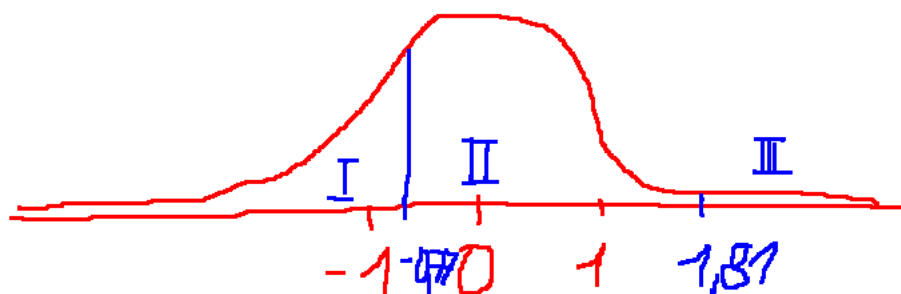
Pravděpodobnost, že padne hodnota menší než -10 je 40%.

d) Dosadím obě mezní x :

$$z_1 = \frac{-12 + 9}{\sqrt{15}} = -0,77$$

$$z_2 = \frac{-2 + 9}{\sqrt{15}} = 1,81.$$

Načrtnu si situaci:



V tabulce najdu příslušné z_2 (červeně). Tím zjistím pravděpodobnost pro oblasti I a II dohromady. Pravděpodobnost pro oblast I zjistím podobně jako v případě za c). Obě pravděpodobnosti odečtu a zjistím pravděpodobnost pro oblast II.

$$P(I + II) = 0,96,$$

$$P(I) = 1 - 0,78 = 0,22,$$

$$P(II) = 0,96 - 0,22 = 0,74.$$

Pravděpodobnost, že padne hodnota mezi -12 a -2 je 74%.

3 Určete pravděpodobnost, že čtvrtý člen bude menší než šest

Máme posloupnost danou rekurentní rovnicí $y_n = 0,9 \cdot y_{n-1} + e_n$, kde e_n má rozdělení $N(0, 10)$ a první člen je 5. Jaká je pravděpodobnost, že čtvrtý člen bude menší než šest?

Řešení výpočtem

$$y_1 = 5,$$

$$y_2 = 0,9 \cdot y_1 + e_2,$$

$$y_2 \sim N(0,9 \cdot 5 + 0, 0 + 10) = N(4,5; 10),$$

$$y_3 = 0,9 \cdot y_2 + e_3 =$$

$$= 0,9 \cdot (0,9 \cdot y_1 + e_2) + e_3 =$$

$$= 0,81 \cdot y_1 + 0,9 \cdot e_2 + e_3,$$

$$y_3 \sim N(0,81 \cdot 5 + 0 + 0, 0 + 0,9^2 \cdot 10 + 10) = N(4,05; 18,1),$$

$$y_4 = 0,9 \cdot y_3 + e_4 =$$

$$= 0,9 \cdot (0,81 \cdot y_1 + 0,9 \cdot e_2 + e_3) + e_4 =$$

$$= 0,729 \cdot y_1 + 0,81 \cdot e_2 + 0,9 \cdot e_3 + e_4,$$

$$y_4 \sim N(0,729 \cdot 5 + 0 + 0 + 0, 0 + 0,81^2 \cdot 10 + 0,9^2 \cdot 10 + 10) =$$

$$= N(3,645; 24,661).$$

Máme tedy rozdělení čtvrtého členu. Provedeme normalizaci:

$$y_4 \sim N(3,645; 24,661),$$

$$y_4 - 3,645 \sim N(0; 24,661),$$

$$z = \frac{y_4 - 3,645}{\sqrt{24,661}} \sim N(0,1).$$

Spočteme z příslušné k našemu meznímu y_4 :

$$y_4 = 6 \Rightarrow z = \frac{6 - 3,645}{\sqrt{24,661}} = 0,474.$$

Najdeme v tabulkách hodnotu distribuční funkce $N(0,10)$ pro 0,474:

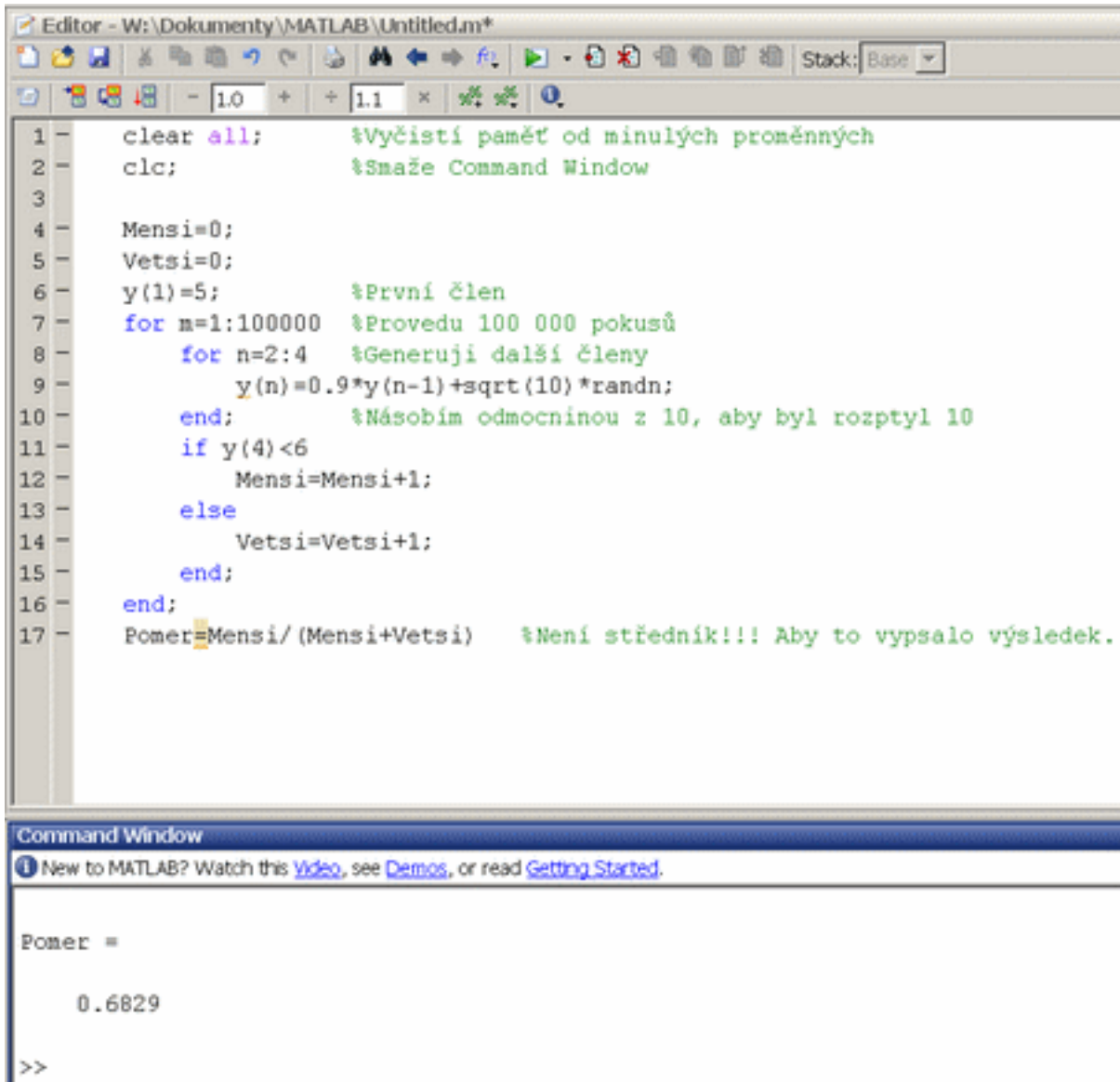
Distribuční funkce normálního rozdělení

$$\Phi(u) = \int_{-\infty}^u \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

U	$\Phi(u)$	u	$\Phi(u)$	u	$\Phi(u)$	u	$\Phi(u)$
0,00	0,50000	0,40	0,65542	0,80	0,78814	1,20	0,88493
0,01	,50399	0,41	,65910	0,81	,79103	1,21	,88686
0,02	,50798	0,42	,66276	0,82	,79389	1,22	,88877
0,03	,51197	0,43	,66640	0,83	,79673	1,23	,89065
0,04	,51595	0,44	,67003	0,84	,79955	1,24	,89251
0,05	,51994	0,45	,67364	0,85	,80234	1,25	,89435
0,06	,52392	0,46	,67724	0,86	,80511	1,26	,89617
0,07	,52790	0,47	,68082	0,87	,80785	1,27	,89796
0,08	,53188	0,48	,68439	0,88	,81057	1,28	,89973
0,09	,53586	0,49	,68793	0,89	,81327	1,29	,90147
0,10	,53983	0,50	,69146	0,90	,81594	1,30	,90320
0,11	,54380	0,51	,69497	0,91	,81859	1,31	,90490
0,12	,54776	0,52	,69847	0,92	,82121	1,32	,90658
0,13	,55172	0,53	,70194	0,93	,82381	1,33	,90824
0,14	,55567	0,54	,70540	0,94	,82639	1,34	,90988
0,15	,55962	0,55	,70884	0,95	,82894	1,35	,91149
0,16	,56356	0,56	,71226	0,96	,83147	1,36	,91309
0,17	,56749	0,57	,71566	0,97	,83398	1,37	,91466
0,18	,57142	0,58	,71904	0,98	,83646	1,38	,91621
0,19	,57535	0,59	,72240	0,99	,83891	1,39	,91774
0,20	,57926	0,60	,72575	1,00	,84134	1,40	,91924
0,21	,58318	0,61	,72907	1,01	,84375	1,41	,92073
0,22	,58706	0,62	,73237	1,02	,84614	1,42	,92220
0,23	,59095	0,63	,73565	1,03	,84850	1,43	,92364
0,24	,59483	0,64	,73891	1,04	,85083	1,44	,92507
0,25	,59871	0,65	,74215	1,05	,85314	1,45	,92647
0,26	,60257	0,66	,74537	1,06	,85543	1,46	,92786
0,27	,60642	0,67	,74857	1,07	,85769	1,47	,92922
0,28	,61026	0,68	,75175	1,08	,85993	1,48	,93056
0,29	,61409	0,69	,75490	1,09	,86214	1,49	,93189

Pravděpodobnost, že čtvrtý člen bude menší než šest, je přibližně 68%.

Řešení numerickou simulací v Matlabu



The image shows a MATLAB Editor window with a script and a Command Window below it. The script in the Editor window is as follows:

```
1 - clear all;           %Vyčistí paměť od minulých proměnných
2 - clc;                %Smaže Command Window
3
4 - Mensi=0;
5 - Vetsi=0;
6 - y(1)=5;            %První člen
7 - for n=1:100000     %Provedu 100 000 pokusů
8 -     for n=2:4      %Generuji další členy
9 -         y(n)=0.9*y(n-1)+sqrt(10)*randn;
10 -     end;          %Násobím odmocninou z 10, aby byl rozptyl 10
11 -     if y(4)<6
12 -         Mensi=Mensi+1;
13 -     else
14 -         Vetsi=Vetsi+1;
15 -     end;
16 - end;
17 - Pomer=Mensi/(Mensi+Vetsi) %Není středník!!! Aby to vypsalo výsledek.
```

The Command Window shows the output of the script:

```
Command Window
New to MATLAB? Watch this video, see Demos, or read Getting Started.

Pomer =

    0.6829

>>
```