Řízení

2. prosince 2014

Spousta lidí má pocit, že by měla něco řídit. A někdy to bývá pravda.

Když už nás myšlenky na řízení napadají, měli bychom si položit následující tři otázky:

Řídit?

Obrovskou zkušeností pro mne byl kdysi jeden letní tábor, kdy mne, coby hlavase, na pár dní sklátila borelioza. Zápasíc s horečkou, leže v týpku, s údivem jsem zjišťoval, že tábor najednou běží snad ještě lépe, než když jsem jej řídil.

Takže - v řízení někdy méně znamená více.

Kam řídit?

> Volba cíle odděluje anděly a zloduchy.
>
> Pak jsou ještě třetí,
>
> o svém cíli nemající potuchy.

Každopádně, když už se pro nějaký cíl rozhoduji, měl bych si být jist, že to je TEN CÍL, který opravdu stojí za to.

Abych životem nebloudil jak ztracená ovečka.

Jak řídit?

Je-li stanoven cíl, ptám se, jak ho dosáhnout.

Prvním a hlavním krokem je vytvoření hodnotících kritérií. Abych mohl posoudit, zda mne určitý krok k cíli přiblížil či vzdálil.

Dám-li kritériu matematickou podobu, může mi matematika pomoci vytvořit optimální taktiku.

Tvorba kritéria

Nejprve si určím veličiny, na nichž moje hodnocení optimality bude záviset. Např. pro jízdu auta to bude rychlost v a plyn p.

Často chci, aby dané veličiny byly co nejblíže určité hodnotě. Např. rychlost chceme mít cca $50\,{}^{\mathrm{km}}/_{\mathrm{h}}$, plyn co nejblíže nule.

Pokud chci penalizovat odchylky na obě strany od optimální hodnoty, často volíme druhou mocninu.

Naše kritérium by tedy mohlo vypadat takto:

$$K = A\left(v - 50\right)^2 + Bp^2.$$

Konstanty A a B jsou váhy a určují, jakou důležitost přisuzuji optimalitě rychlosti resp. plynu. Nastavení těchto konstant je věcí „politiky", přesvědčení, názoru. To za nás žádná matematika neudělá. Vysoké A znamená, že je pro mne důležité udržovat rychlost blízko padesátky, vysoké B znamená, že je pro mne důležitá šetřivá jízda.

Protože ve skutečnosti záleží pouze na poměru jednotlivých vah, často se jedna z vah volí jednička a ostatní se k tomu dopočítají.

Vícekrokové řízení

Zkusili jste si někdy stoupnout v kánoi? Trochu se zhoupne. Pokusíte se to vyrovnat, ale kánoe se zhoupne ještě víc. Ještě se jednou se to pokusíte vyrovnat, ... a pak už plavete. To je ukázka jednokrokového řízení, kdy se snažíte optimálně řešit současnou situaci, ale nezvažujete, co to udělá do budoucna. Takové jednokrokové řízení často systém (kánoi, auto, ekonomiku, ...) rozkmitá.

Proto, chceme-li řídit rozumně, musíme řídit vícekrokově. Optimální by samozřejmě bylo zvažovat následky „od teď až do konce světa". Naštěstí ale zjišťujeme, že pokud zvětšujeme počet kroků, řízení pro současnost se ustaluje a příliš se již nemění. V praxi tedy stačí zvolit takový počet kroků, aby se s dalším přidáváním kroků aktuální řízení již příliš neměnilo.

Často nastavíme kritérium pro současné i budoucí okamžiky stejné. Pak by naše kritérium pro auto mohlo mít tvar:

$$K = \sum_{t=n+1}^{n+k} A\left(v_t - 50\right)^2 + Bp_t^2.$$

Písmenko k značí počet kroků řízení.

V kritériu nám vystupují budoucí veličiny, které neznáme. Musíme tedy za ně dosazovat odhady. Čím dále do budoucna s těmito odhady jdeme, tím jsou nejistější a nejistější. A tím je i řízení do budoucna nejistější a nejistější.

To nám však nevadí, protože obvykle potřebujeme jen řízení aktuální.

V praxi to vypadá tak, že spočteme např. padesátikrokové řízení. Použijeme ale jen to jedno řízení aktuální. Pak počkáme na nová data, spočteme opět celé padesátikrokové řízení, použijeme ale jen řízení aktuální, ... a tak se to opakuje.

Pokud bychom nedostávali další data, používali bychom samozřejmě další a další spočtená řízení z posledního výpočtu.

Zkuste si několikakrokové řízení vykreslit za pomoci programu, který máte na stránkách. Podle toho, jaké zvolíte parametry, můžete někdy vidět, že na konci se to řízení chová „divně". To je proto, že na konci už řízení nehlídá, „co bude potom." My ale použijeme jedno či několik řízení ze začátku, která s dalšími kroky počítají.

Ruční výpočet řízení

Nyní si vyzkoušíme výpočet řízení ručně. Jaké hlavní poznatky si odneseme? Řízení musíme počítat odzadu. Nejprve hledáme (pomocí derivace), jaké poslední řízení vzít, aby kritérium bylo co nejmenší. Protože poslední řízení se nám vyskytuje jen v posledním členu kritéria, není to naštěstí těžké. Toto optimální poslední řízení dosadíme do posledního členu kritéria a dostaneme tím jakýsi zbytek posledního členu.

Nyní se vrhneme na řízení předposlední. To se vyskytuje jen v předposledním členu a ve zbytku. Hledáme (pomocí derivace) takovou hodnotu, aby kritérium bylo co nejmenší. Dosadíme a získáme tím nový zbytek.

Předpředposlední řízení se vyskytuje jen v předpředposledním členu a ve zbytku. ... Stejným způsobem pokračujeme, až dopočítáme řízení aktuální.

Zjistíte, že to není těžké, spíše dlouhé. Proto jistě oceníte, když tuto práci udělá počítač.

Ruční řízení - příklad 1

Máme lineární regresní model druhého řádu s řízením. Spočtěte dvoukrokové optimální řízení. Váhu pro řízení volte dvakrát větší než pro výstup.

Model:

$$\begin{aligned} y_n &= u_n + 3y_{n-1} - 2y_{n-2} + e_n, \\ e_n &\sim N(0, 1). \end{aligned}$$

První dva výstupy:

$$\begin{aligned} y_1 &= 4, \\ y_2 &= 3. \end{aligned}$$

Kritérium:

$$K = \sum_{i=3}^{4} \left(y_i^2 + 2u_i^2 \right).$$

Dosadíme za y_4 a známé y_2:

$$\begin{aligned} K &= y_3^2 + 2u_3^2 + y_4^2 + 2u_4^2 = \\ &= y_3^2 + 2u_3^2 + (u_4 + 3y_3 - 2y_2)^2 + 2u_4^2 = \\ &= y_3^2 + 2u_3^2 + (u_4 + 3y_3 - 6)^2 + 2u_4^2 \end{aligned}$$

Zderivujeme a spočteme u_4:

$$\frac{\partial K}{\partial u_4} = 0.$$

$$\begin{aligned}
2\left(u_4+3y_3-2y_2\right)\cdot 1+4u_4 &= 0\\
2u_4+6y_3-4y_2+4u_4 &= 0\\
6u_4 &= -6y_3+4y_2\\
u_4 &= -y_3+\frac{2}{3}y_2\\
u_4 &= -y_3+2.
\end{aligned}$$

Dosadíme za u_4 a pak za y_3 a známá y_2 a y_1:

$$\begin{aligned}
K &= y_3^2+2u_3^2+\left(\left(-y_3+2\right)+3y_3-6\right)^2+2\left(-y_3+2\right)^2=\\
&= y_3^2+2u_3^2+\left(2y_3-4\right)^2+2\left(-y_3+2\right)^2=\\
&= y_3^2+2u_3^2+4y_3^2-16y_3+16+2y_3^2-8y_3+8=\\
&= 2u_3^2+7y_3^2-24y_3+24=\\
&= 2u_3^2+7\left(u_3+3y_2-2y_1\right)^2-24\left(u_3+3y_2-2y_1\right)+24=\\
&= 2u_3^2+7\left(u_3+9-8\right)^2-24\left(u_3+9-8\right)+24=\\
&= 2u_3^2+7\left(u_3+1\right)^2-24\left(u_3+1\right)+24.
\end{aligned}$$

Zderivujeme a spočteme u_3:

$$\frac{\partial K}{\partial u_3}=0.$$

$$\begin{aligned}
4u_3+14\left(u_3+1\right)-24 &= 0\\
18u_3-10 &= 0\\
u_3 &= \frac{10}{18}=\frac{5}{9}.
\end{aligned}$$

Zapíšeme výsledky:

$u_3=\frac{5}{9}$,
$u_4=-y_3+2.$

Ruční řízení - příklad 2

Máme lineární regresní model prvního řádu s řízením. Spočtěte tříkrokové optimální řízení. Váhu pro výstup volte dvakrát větší než pro řízení.

Model:

$$\begin{aligned}
y_n &= u_n-3y_{n-1}+e_n,\\
e_n &\sim N\left(0,\,10\right).
\end{aligned}$$

První výstup:

$$y_1 = 11.$$

Kritérium:

$$K = \sum_{i=2}^{4} \left(2y_i^2 + u_i^2\right).$$

Dosadíme za y_4:

$$\begin{aligned} K &= 2y_2^2 + u_2^2 + 2y_3^2 + u_3^2 + 2y_4^2 + u_4^2 = \\ &= 2y_2^2 + u_2^2 + 2y_3^2 + u_3^2 + 2\left(u_4 - 3y_3\right)^2 + u_4^2. \end{aligned}$$

Zderivujeme a spočteme u_4:

$$\frac{\partial K}{\partial u_4} = 0.$$

$$\begin{aligned} 4\left(u_4 - 3y_3\right) \cdot 1 + 2u_4 &= 0 \\ 4u_4 - 12y_3 + 2u_4 &= 0 \\ 6u_4 &= +12y_3 \\ u_4 &= 2y_3. \end{aligned}$$

Dosadíme za u_4 a pak za y_3:

$$\begin{aligned} K &= 2y_2^2 + u_2^2 + 2y_3^2 + u_3^2 + 2\left(2y_3 - 3y_3\right)^2 + \left(2y_3\right)^2 = \\ &= 2y_2^2 + u_2^2 + 8y_3^2 + u_3^2 = \\ &= 2y_2^2 + u_2^2 + 8\left(u_3 - 3y_2\right)^2 + u_3^2. \end{aligned}$$

Zderivujeme a spočteme u_3:

$$\frac{\partial K}{\partial u_3} = 0.$$

$$\begin{aligned} 16\left(u_3 - 3y_2\right) + 2u_3 &= 0 \\ 16u_3 - 48y_2 + 2u_3 &= 0 \\ 18u_3 &= 48y_2 \\ u_3 &= \frac{48}{18}y_2 = \frac{8}{3}y_2. \end{aligned}$$

Dosadíme za u_3 a pak za y_2:

$$\begin{aligned}
K &= 2y_2^2+u_2^2+8\left(\frac{8}{3}y_2-3y_2\right)^2+\left(\frac{8}{3}y_2\right)^2=\\
&= 2y_2^2+u_2^2+8\left(\frac{8}{3}y_2-\frac{9}{3}y_2\right)^2+\left(\frac{8}{3}y_2\right)^2=\\
&= \frac{18}{9}y_2^2+u_2^2+\frac{8}{9}y_2^2+\frac{64}{9}y_2^2=\\
&= 10y_2^2+u_2^2=\\
&= 10\left(u_2-3y_1\right)^2+u_2^2.
\end{aligned}$$

Zderivujeme a spočteme u_3:

$$\frac{\partial K}{\partial u_2}=0.$$

$$\begin{aligned}
20\left(u_2-3y_1\right)+2u_3 &= 0\\
20u_2-60y_1+2u_2 &= 0\\
22u_2 &= 60y_1\\
u_2 &= \frac{60}{22}y_1=\frac{30}{11}\cdot 11=30.
\end{aligned}$$

Zapíšeme výsledky:

$u_2=30,$
$u_3=\frac{8}{3}y_2,$
$u_4=2y_3$

Kriteriální matice

Když se pokusíte ruční výpočet převést do programu a chcete, aby byl program aspoň trochu univerzální, zjistíte, že to není vůbec lehké.

Velmi nám pomůže zápis pomocí matic. Pracovat budeme se stavovým modelem.

Nejprve převedeme do maticové podoby naše kritérium. To zatím vypadá takto:

$$K=\sum_{t=n+1}^{n+k}A\cdot v_t^2-2\cdot A\cdot v_t\cdot 50+A\cdot 50^2+Bp_t^2.$$

Tento výraz můžeme přepsat:

$$K=\sum_{t=n+1}^{n+k}\left(\begin{array}{ccc} v_t & p_t & 1\end{array}\right)\cdot\left(\begin{array}{ccc} A & 0 & -50A\\ 0 & B & 0\\ -50A & 0 & 50^2\cdot A\end{array}\right)\cdot\left(\begin{array}{c} v_t\\ p_t\\ 1\end{array}\right).$$

Matici uprostřed říkáme kriteriální matice. Vektory na obou stranách jsou stavové vektory. Pokud by model vyžadoval, mohou být ve stavovém vektoru i veličiny další, Pak ale musíme kriteriální matici patřičně nafouknout. Uvedený vektor je jakýsi minimální stavový vektor.

Poznámka: Pokud bychom chtěli mít v kritériu pro každý čas jinou rychlost, ke které se chceme blížit, značme ji g_t, pak by v matici místo 50 figurovala tato g_t.

Poznámka: Pokud bychom chtěli mít v kritériu např. i přírůstky rychlostí, tedy člen $(v_t - v_{t-1})^2$, musela by ve stavovém vektoru přibýt veličina v_{t-1}. Kritérium s tímto třetím členem a optimální rychlostí g_t by pak vypadalo:

$$
\begin{aligned}
K &= \sum_{t=n+1}^{n+k} A\left(v_t - 50\right)^2 + Bp_t^2 + C\left(v_t - v_{t-1}\right)^2 = \\
&= \sum_{t=n+1}^{n+k} A \cdot v_t^2 - 2 \cdot A \cdot v_t \cdot 50 + A \cdot 50^2 + Bp_t^2 + C \cdot v_t^2 - 2 \cdot C \cdot v_t \cdot v_{t-1} + C \cdot v_{t-1}^2 = \\
&= \sum_{t=n+1}^{n+k} \begin{pmatrix} v_t & p_t & v_{t-1} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A+C & 0 & -C & -Ag_t \\ 0 & B & 0 & 0 \\ -C & 0 & C & 0 \\ -Ag_t & 0 & 0 & Ag_t^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_t \\ p_t \\ v_{t-1} \\ 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$