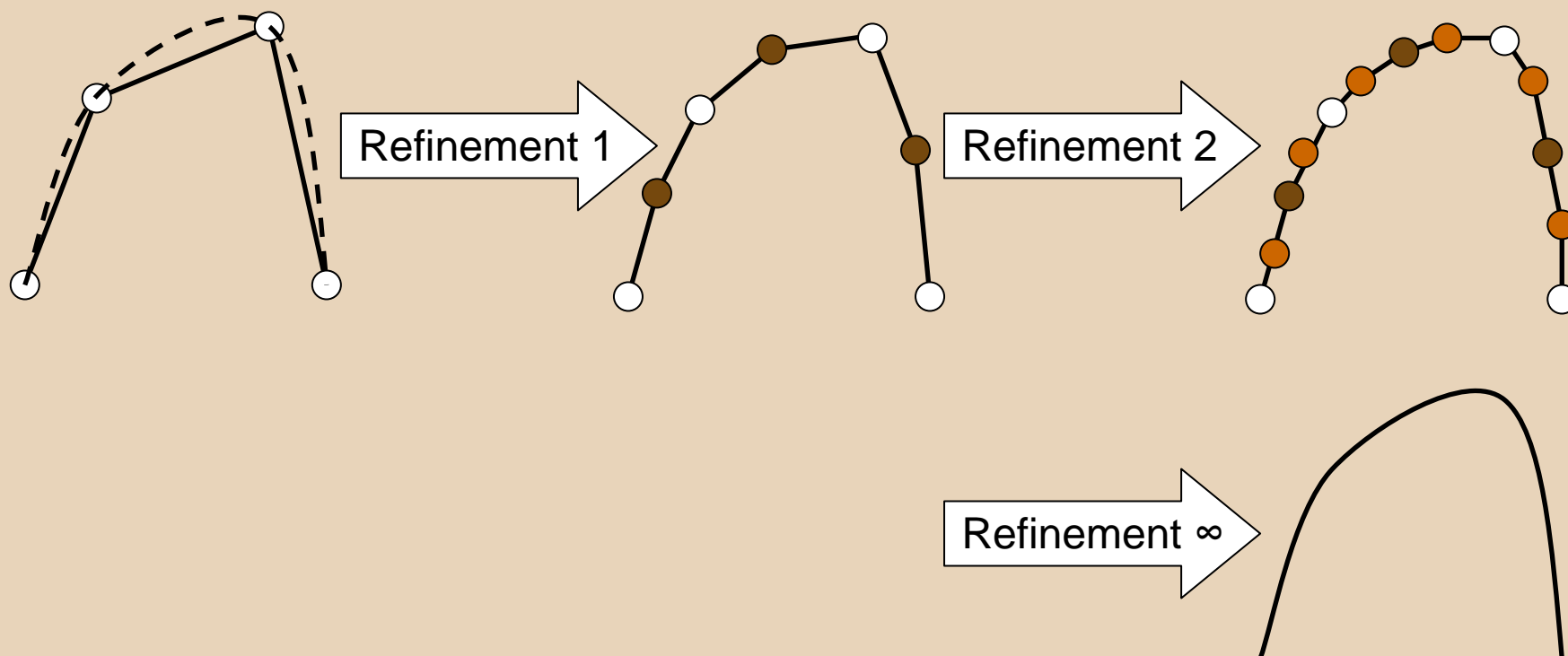

Subdivision



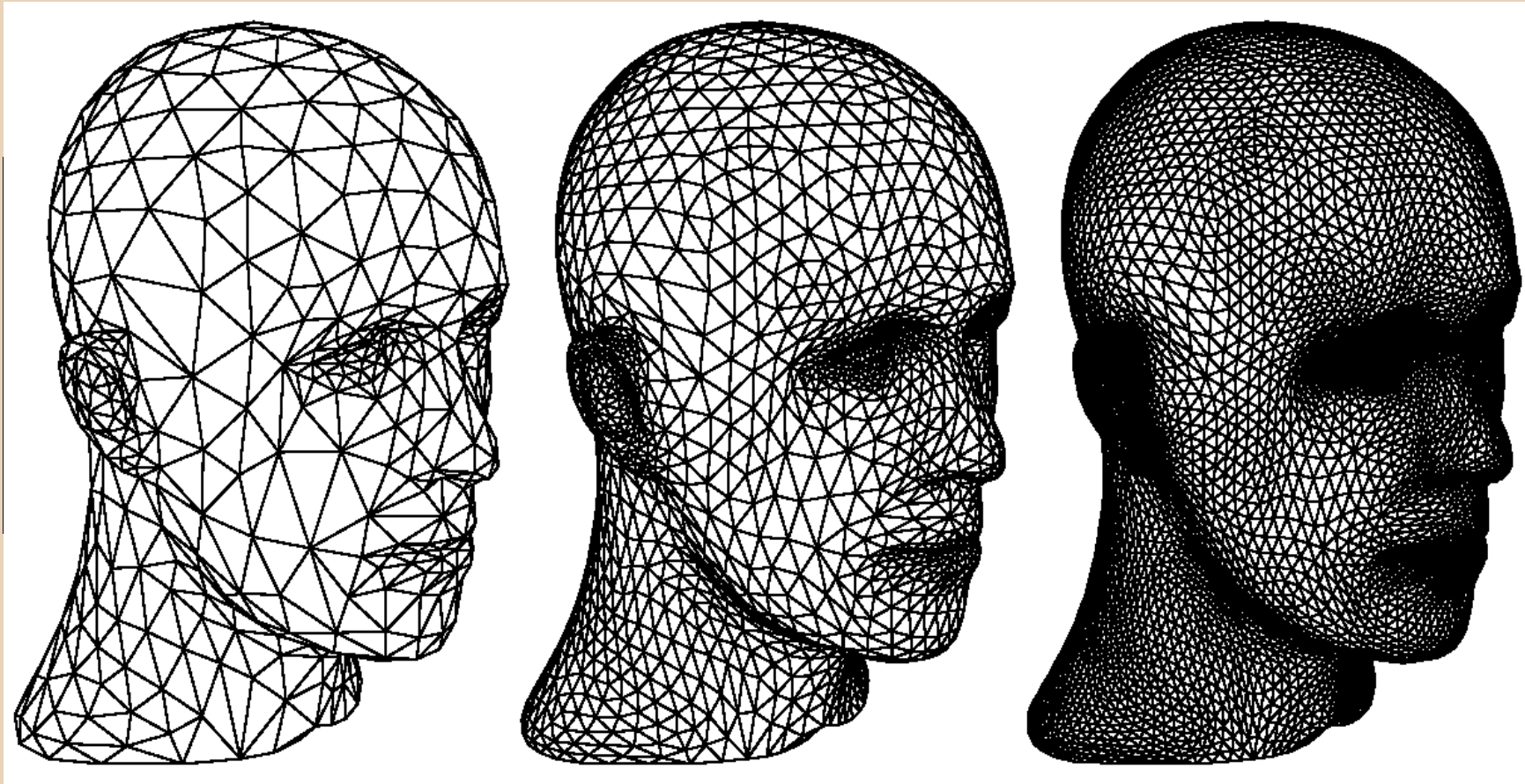
Geri's Game (1989) : Pixar Animation Studios

Subdivision pro křivky

- Křivka jako limitní případ iteračního procesu.

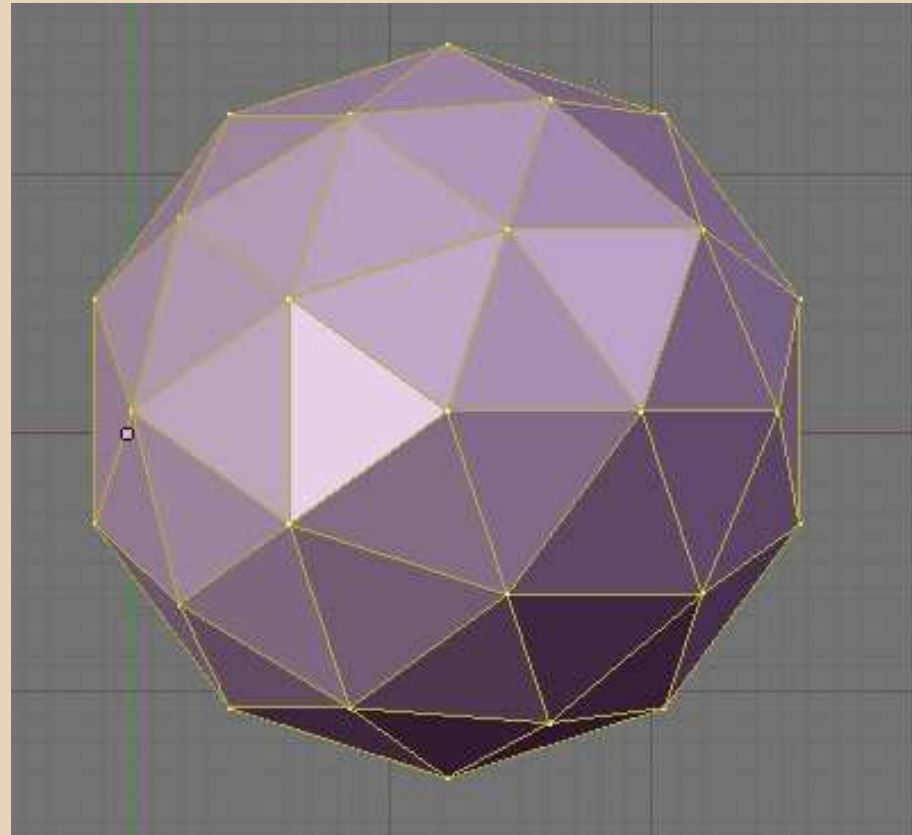


Subdivision pro plochy



Výhody a nevýhody Subdivision

- Efektivní reprezentace
- Snadný rendering
- Afinní invariance
- Obtížná analýza spojitosti
- Nemožná parametrizace

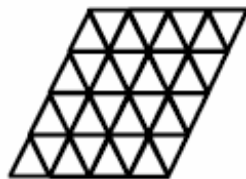
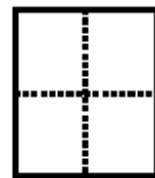
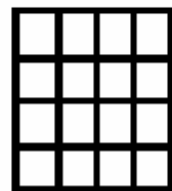


Klasifikace dělicích schémat

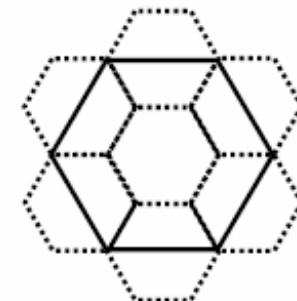
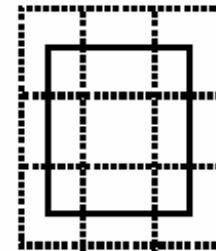
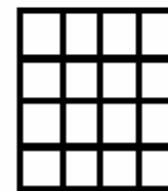
- Dle pravidel zjemňování
- Dle typu topologie sítě
- Aproximující x interpolující

Pravidla zjemňování

Primární (zjemňování stěn)



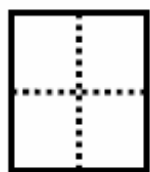
Duální (zjemňování vrcholů)



Klasifikace dělicích schémat

Primální (vkládání vrcholů)

aproximační *interpolační*



Catmull
-Clark

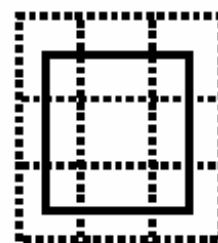
Kobbelt



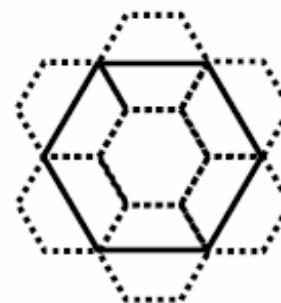
Loop

Butterfly

Duální (ořezávání rohů)



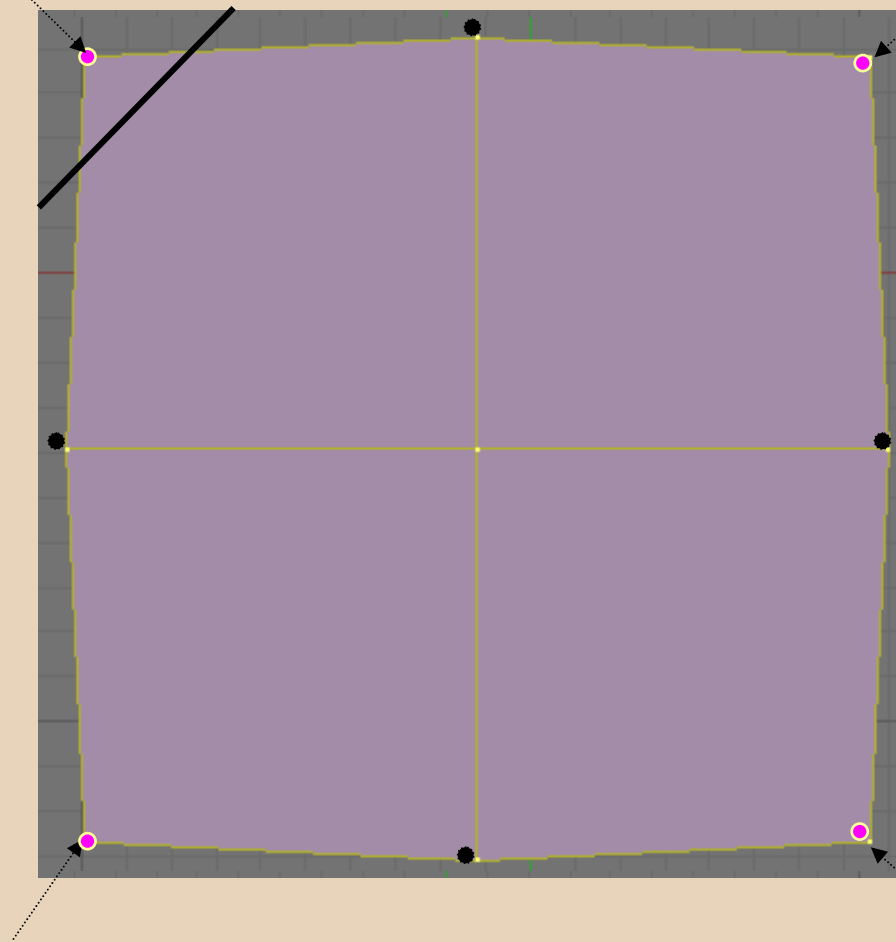
Doo-Sabin
Midedge



Dyn-Levin-Liu
(nelineární)

Základní princip – 2D

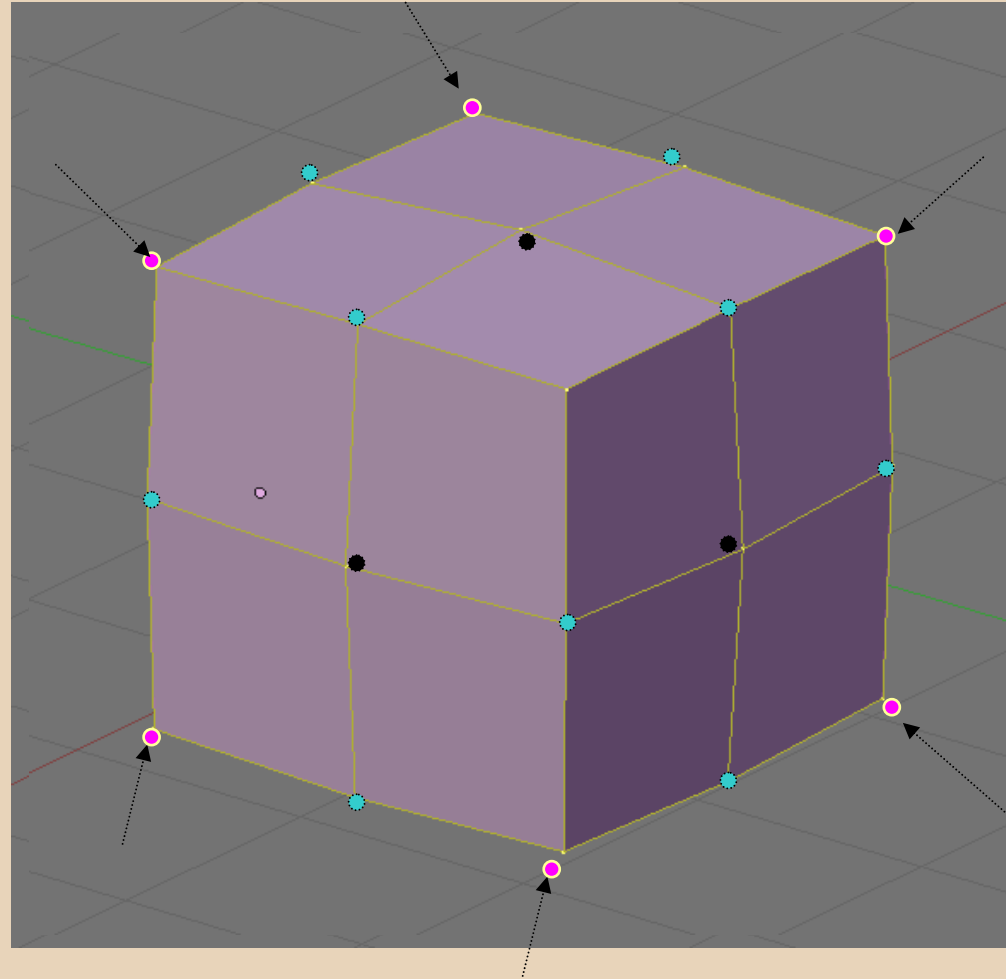
- Dělení
- Vyhlazení (zprůměrování)



$$Q_{2i+1} = \frac{P_i + P_{i+1}}{2}$$

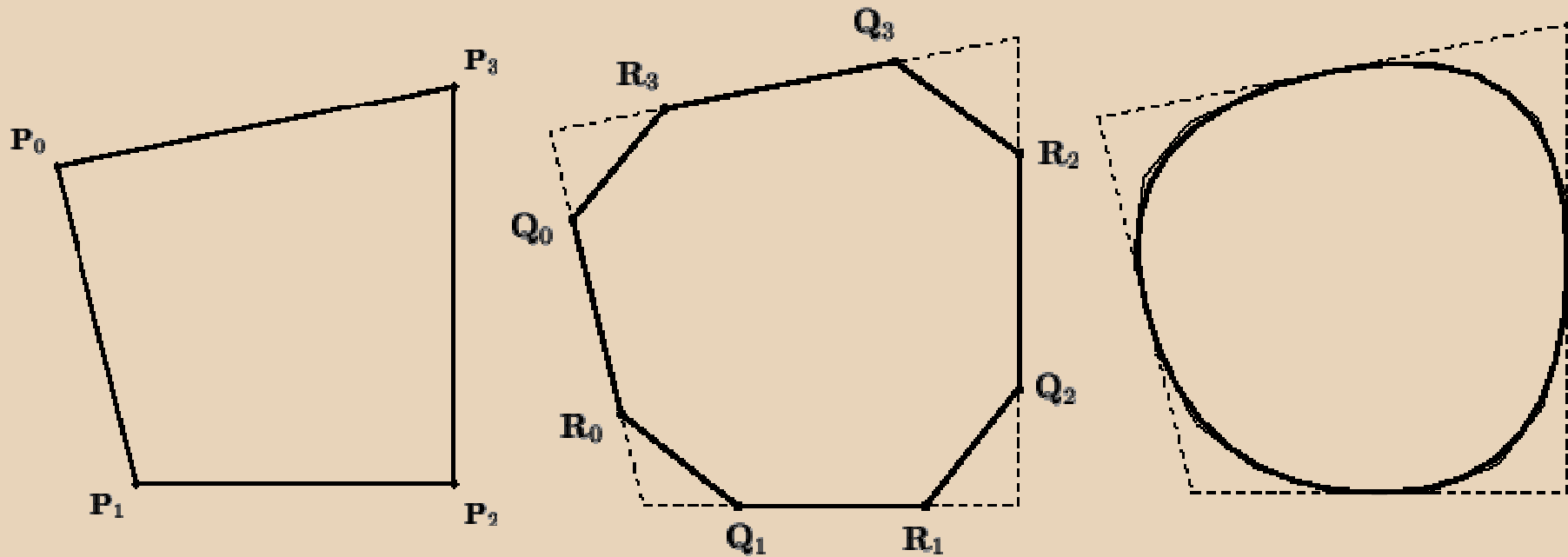
$$Q_{2i} = \frac{P_i + P_{2i+1} + P_{2i-1}}{3}$$

Základní princip – 3D

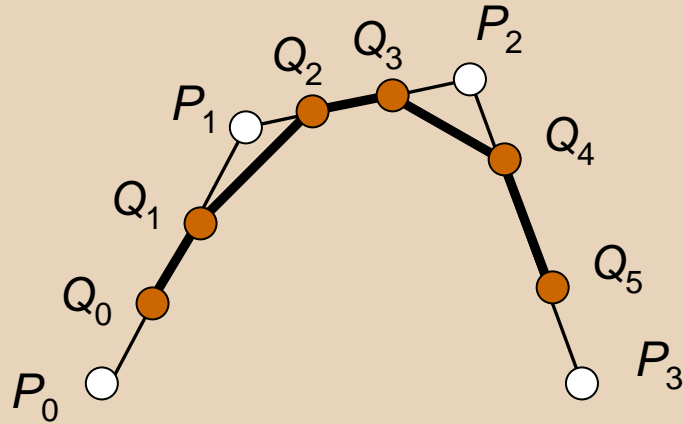


Chaiken Algorithmus

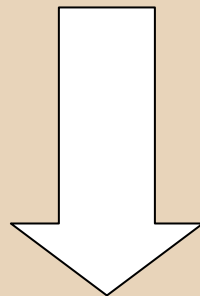
Metoda seříznutí rohu – 2 dělicí body na každé hraně $1/4$
and $3/4$



Chaiken Algorithmus

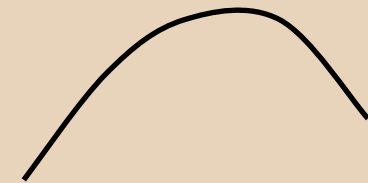


Iterace



$$Q_{2i} = \frac{1}{4}P_i + \frac{3}{4}P_{i+1}$$

$$Q_{2i+1} = \frac{3}{4}P_i + \frac{1}{4}P_{i+1}$$



Konvergence k výsledné křivce

$$Q_0 = \frac{1}{4}P_0 + \frac{3}{4}P_1$$

$$Q_1 = \frac{3}{4}P_0 + \frac{1}{4}P_1$$

$$Q_2 = \frac{1}{4}P_1 + \frac{3}{4}P_2$$

$$Q_3 = \frac{3}{4}P_1 + \frac{1}{4}P_2$$

$$Q_4 = \frac{1}{4}P_2 + \frac{3}{4}P_3$$

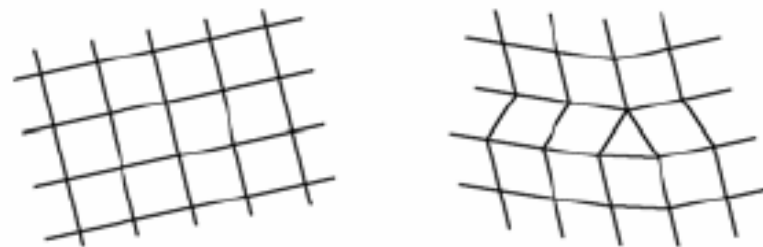
$$Q_5 = \frac{3}{4}P_2 + \frac{1}{4}P_3$$

Sítě mnohoúhelníků

- nejjednodušší reprezentace 3D modelů
- pro hladké objekty nadměrný počet polygonů

B-spline povrchy

- hladce navazující polynomiální pláty, které aproximují vrcholy řídicí sítě
- nutná pravidelná síť řídicích bodů
- neumí popsat povrchy libovolné topologie



Pravidelná a nepravidelná topologie

Matrice dělení

- Dělení může být vyjádřeno pomocí matice S dělicích koeficientů (vah).
 - S je velmi řídká
 - Nevhodné pro implementaci
 - Využití pro analýzu křivosti a limitní plochy

$$S \cdot p = \hat{p}$$

$$\begin{bmatrix} w_{00} & w_{01} & \cdots & 0 \\ w_{10} & w_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & w_{nj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{p}_0 \\ \hat{p}_1 \\ \hat{p}_2 \\ \vdots \\ \hat{p}_n \end{bmatrix}$$

↑ ↑ ↑
Matrice dělení Původní Nové body
řídící body

Dělení Coonsova bikubického B-spline

Matice dělení je odvozena z koeficientů spline.

- Algoritmus dělení (subdivision) konverguje k Spline plochám, které jsou ve všech bodech C^2 spojité.

$$X(u, v) = \frac{1}{36} (C_0(u), C_1(u), C_2(u), C_3(u)) \cdot M \cdot (C_0(v), C_1(v), C_2(v), C_3(v))$$

$$M = \begin{pmatrix} P_{00} & P_{01} & P_{02} & P_{03} \\ P_{10} & P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{20} & P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{30} & P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{pmatrix}$$

$$C_1(t) = (1-t)^3$$

$$C_2(t) = 3t^3 - 6t^2 + 4$$

$$C_3(t) = -3t^3 + 3t^2 + 3t + 1$$

$$C_4(t) = t^3$$

$$X(u, v) = U \cdot K \cdot M \cdot K^T \cdot V^T$$

$$K = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} u^3 & u^2 & u & 1 \end{pmatrix}$$

$$V = \begin{pmatrix} v^3 & v^2 & v & 1 \end{pmatrix}$$

Dělení plátu pro poloviční intervaly

$$X(u, v) = U \cdot K \cdot M \cdot K^T \cdot V^T$$

Po dosazení transformace parametru $u_* = \frac{u}{2}, v_* = \frac{v}{2}$

$$X(u_*, v_*) = U \cdot S \cdot K \cdot M \cdot K^T \cdot S^T \cdot V^T$$

$$S = \begin{pmatrix} 1/8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Získáme opět bikubický spline s jinými řídicími body

$$X_*(u, v) = U \cdot K \cdot M_* \cdot K^T \cdot V^T$$



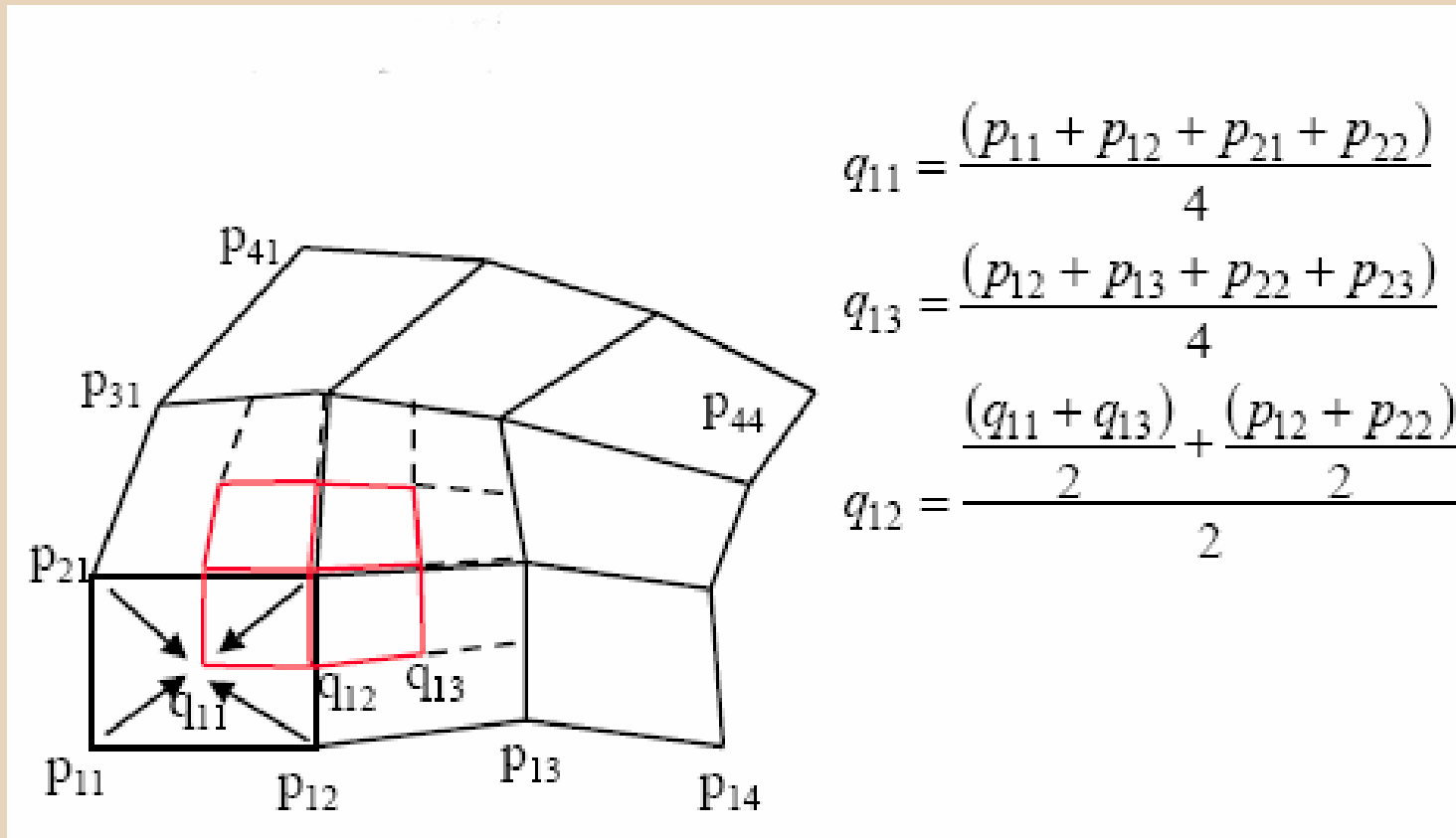
$$U \cdot S \cdot K \cdot M \cdot K^T \cdot S^T \cdot V^T = U \cdot K \cdot M_* \cdot K^T \cdot V^T$$
$$M_* = H M H^T, H = K^{-1} S K$$

$$H = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

Matice dělení

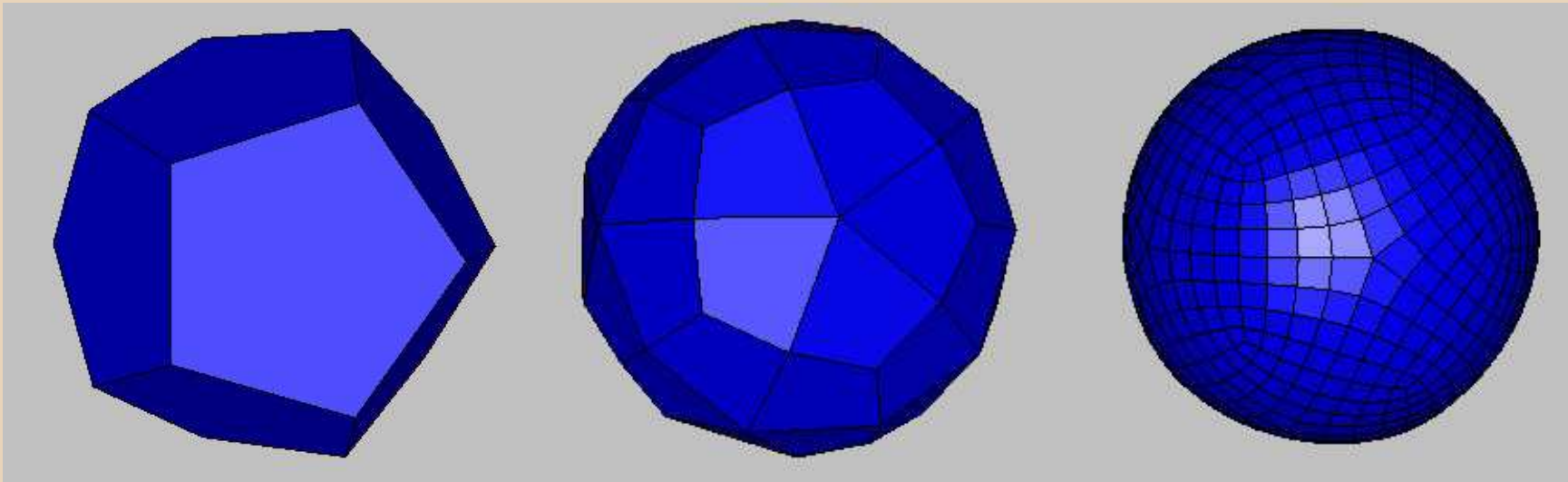
Dělení plátu

$$M_* = HMH^T$$



Catmull-Clark

- Nové body leží v konvexním obalu bodů původních
- Lokalita změn
- Algoritmus je afinně invariantní
- (Všechny algoritmy používají *barycentrické souřadnice*)



Catmull-Clark

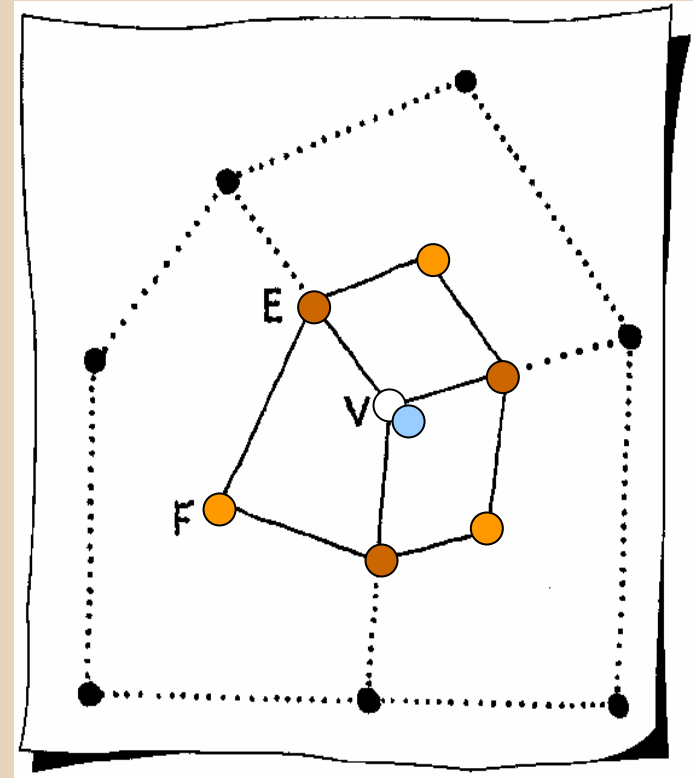
- F - vrcholy
- E-vrcholy
- → ● V - vrcholy

Algoritmus:

- 1) vytvoř nové F-vrcholy: těžiště stěny
- 2) vytvoř E-vrcholy: průměr středu hrany a F-vrcholů přilehlých stěn
- 3) Posuň původní V- vrcholy: kombinace původního vrcholu, středu hrany a nových E a F vrcholů
- 4) vytvoř nové stěny (F-E-V-E)

Opakuj....

Výstup: 4-úhelníková síť, stupně vrcholů mohou být různé



Catmull-Clark Subdivision (1978)

● F - vrcholy

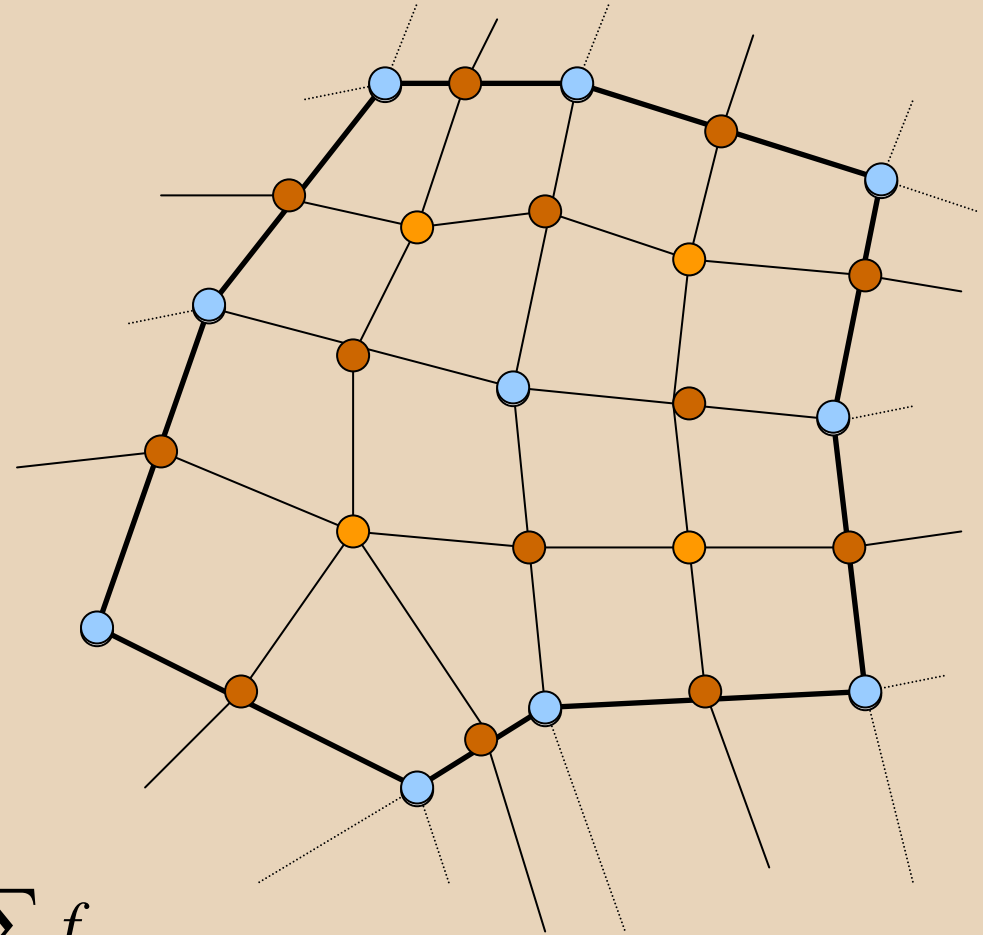
$$f = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n v_i$$

● E - vrcholy

$$e = \frac{v_1 + v_2 + f_1 + f_2}{4}$$

○ → ● V - vrcholy

$$v_{i+1} = \frac{n-2}{n} v_i + \frac{1}{n} \sum_j e_j + \frac{1}{n} \sum_j f_j$$



Catmull-Clark schéma (1978)

● V - vrcholy

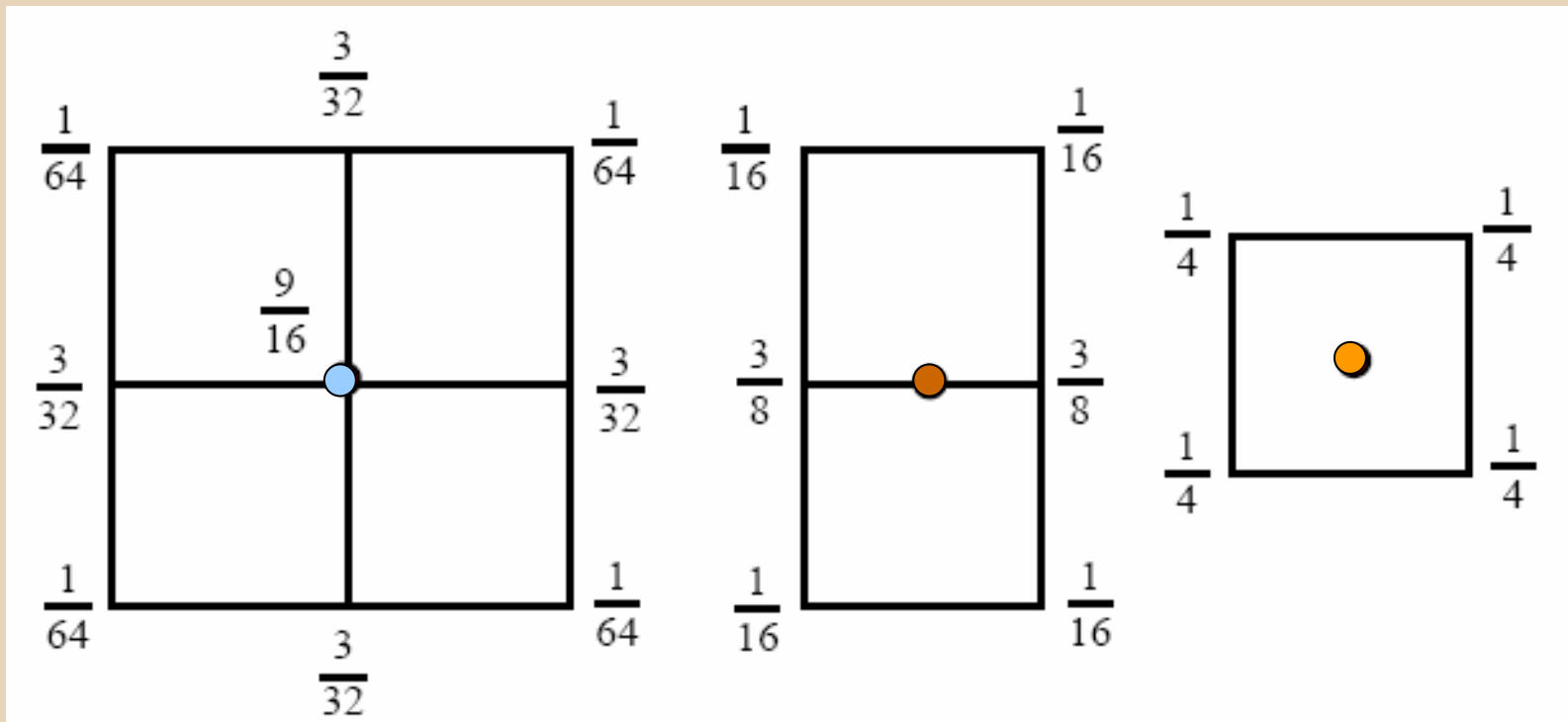
● E - vrcholy

● F - vrcholy

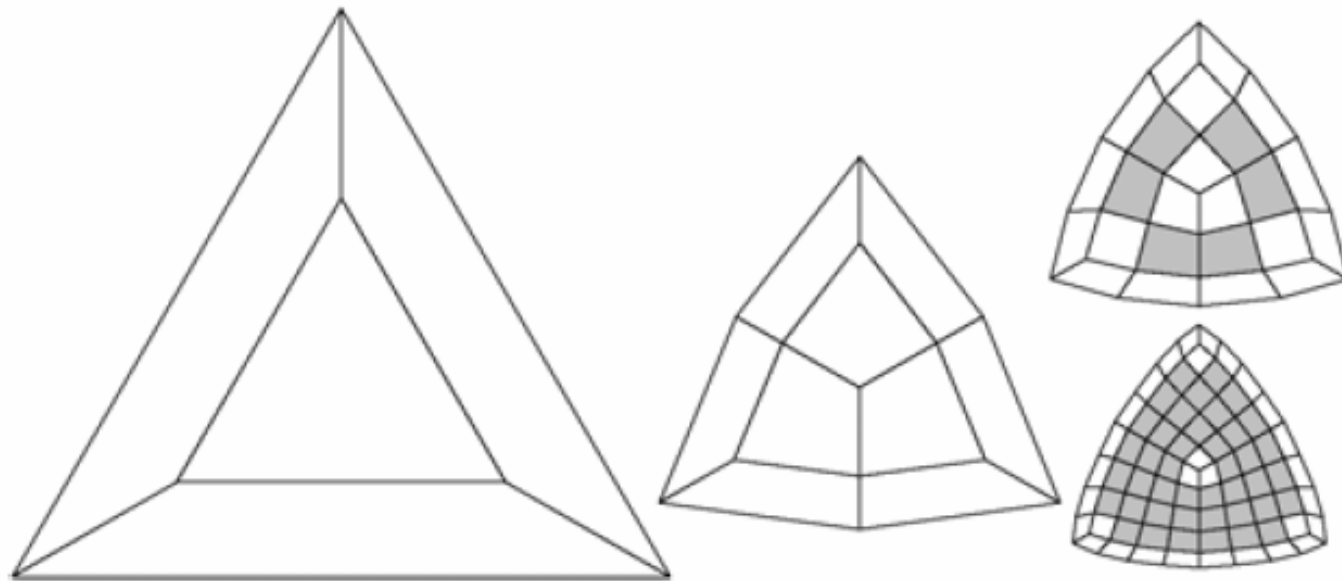
$$v_{i+1} = \frac{n-2}{n}v_i + \frac{1}{n}\sum_j e_j + \frac{1}{n}\sum_j f_j$$

$$e = \frac{v_1 + v_2 + f_1 + f_2}{4}$$

$$f = \frac{1}{n}\sum_1^n v_i$$

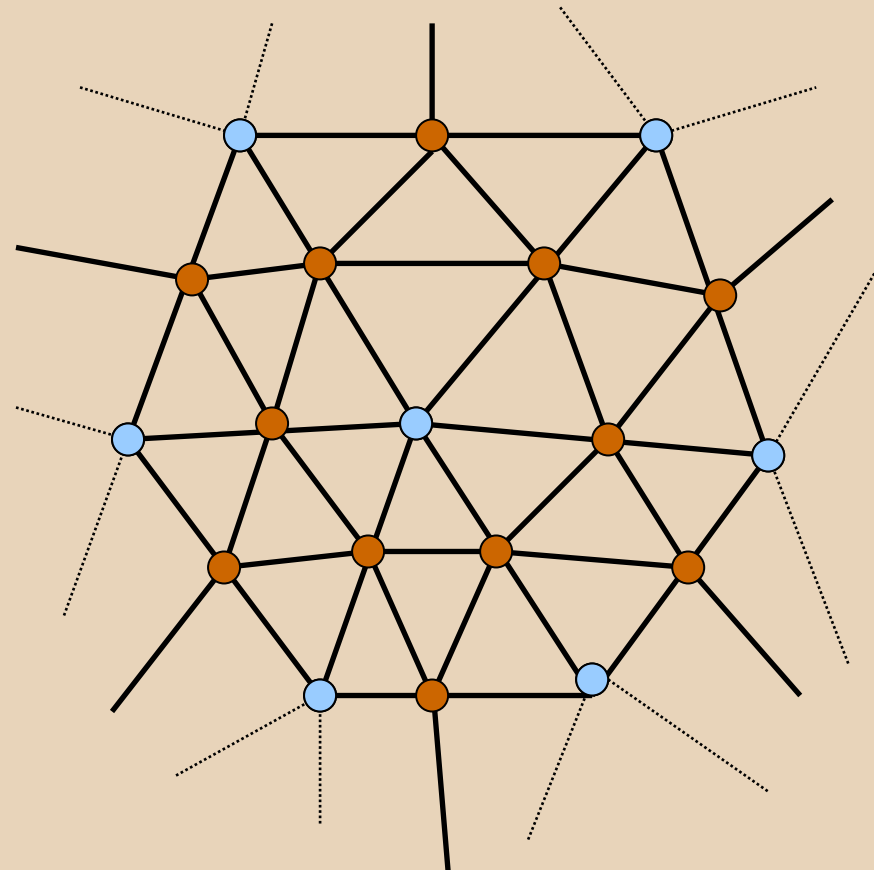
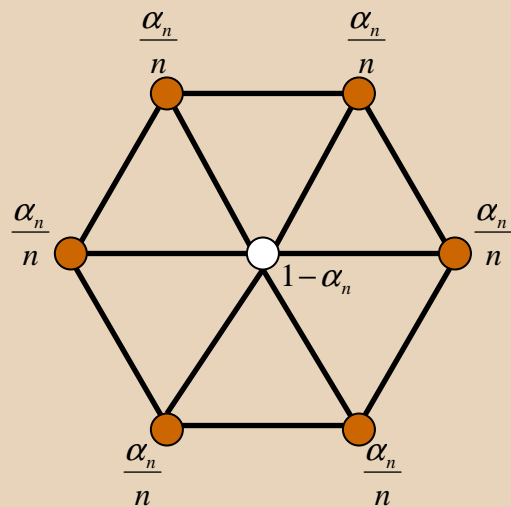
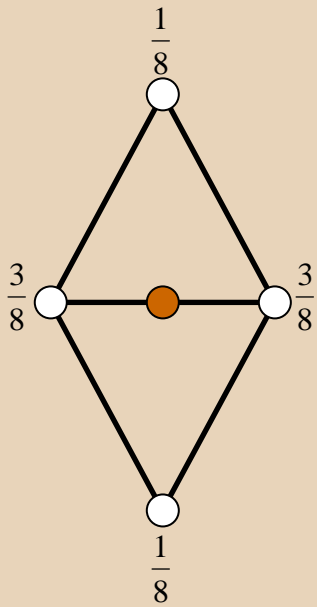


Catmull-Clarkovo dělení - vlastnosti



- po první iteraci jsou všechny stěny čtyřúhelníkové a počet nepravidelných bodů konstantní
- přibývá stěn, jež můžeme nahradit B-spline plátem
- uzavřené povrchy: v každé iteraci se počet stěn zvýší 4x

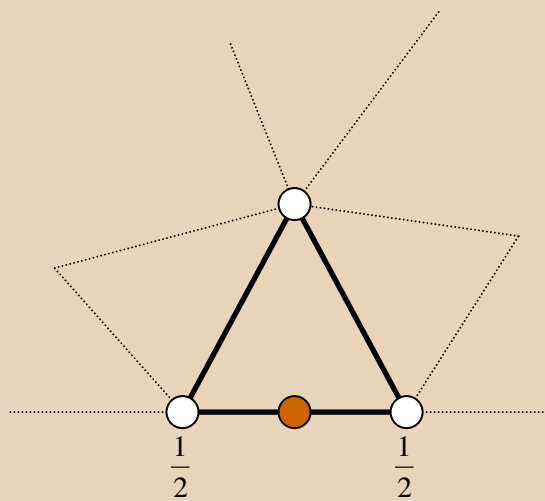
Loop Subdivision



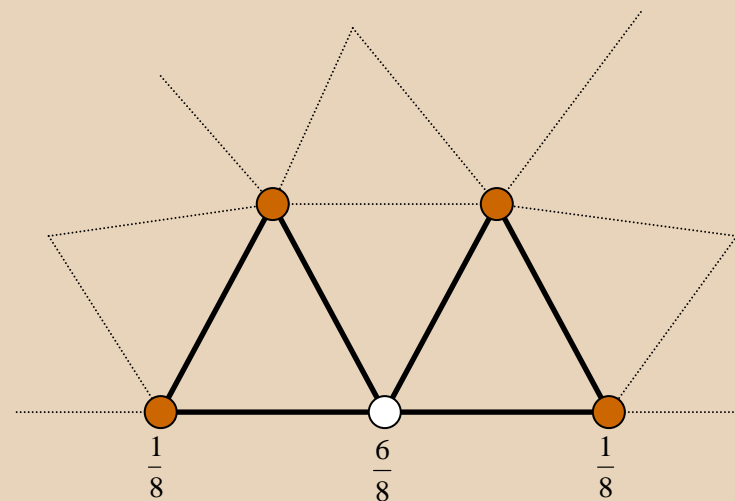
$$\alpha_n = \frac{1}{64} \left(40 - \left(3 + 2 \cos \left(\frac{2\pi}{n} \right) \right)^2 \right)$$

Loop Subdivision

- Dělení na hranici

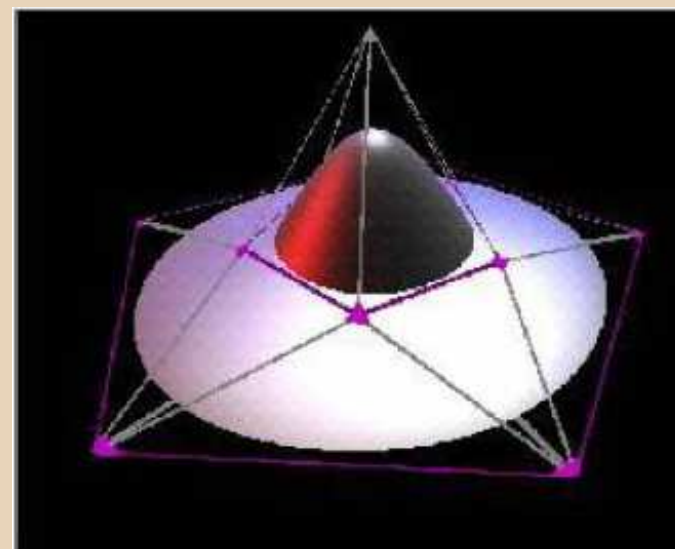
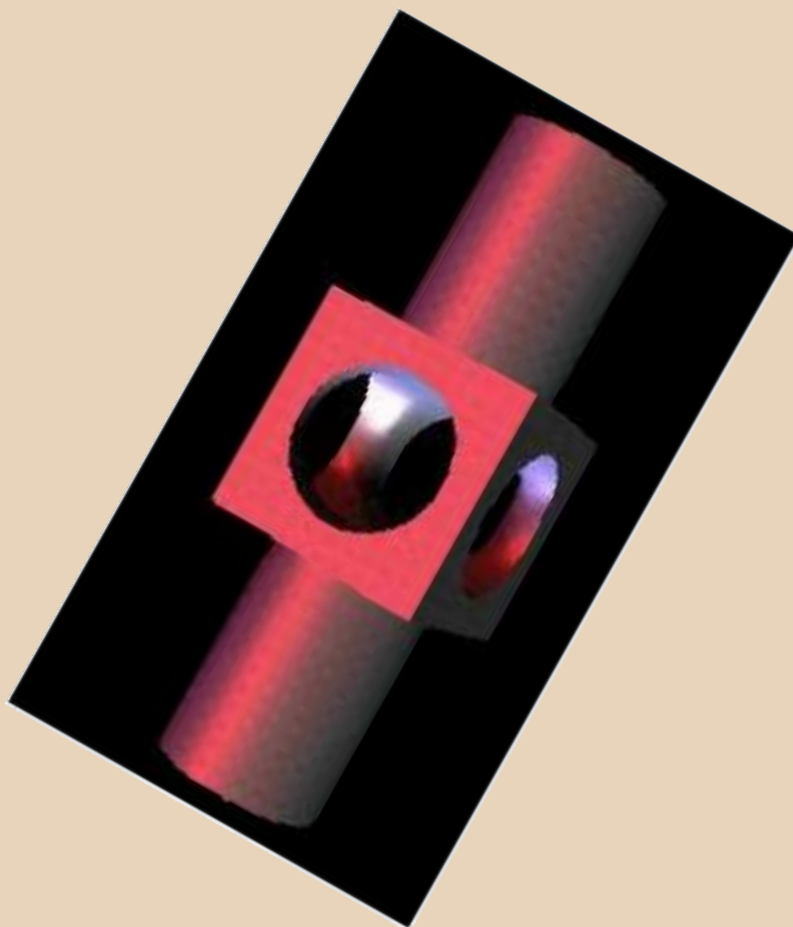
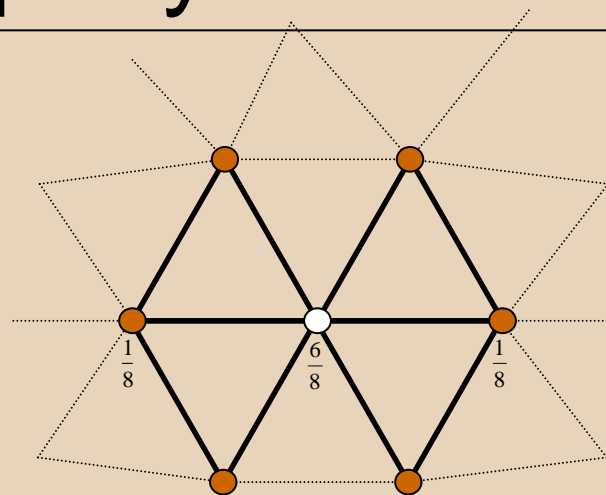


Edge Rule



Vertex Rule

Ohyby a puky



Dělicí schéma Butterfly

- Interpolační
- Dělicí schéma primární
- Vstupem je trojúhelníková síť

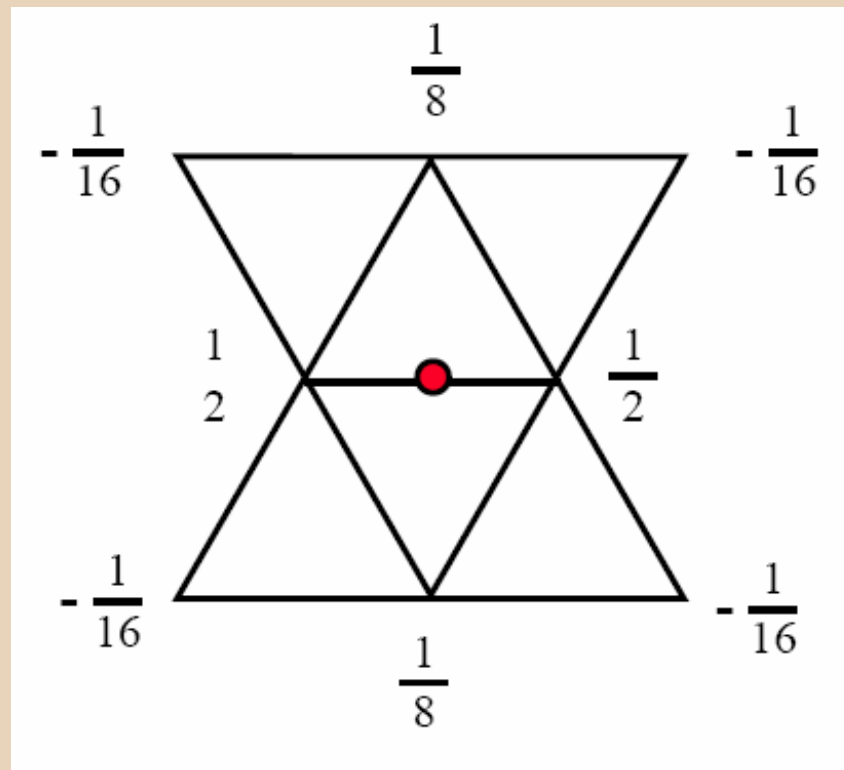
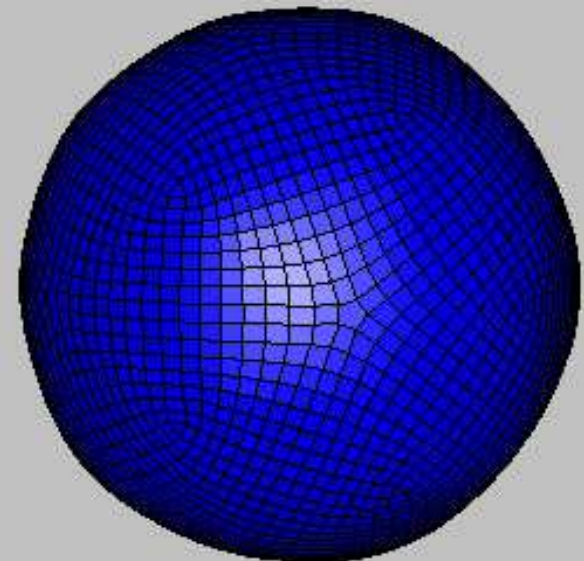
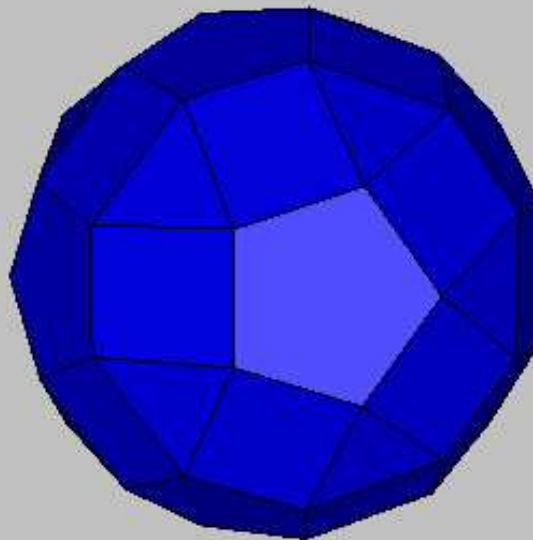
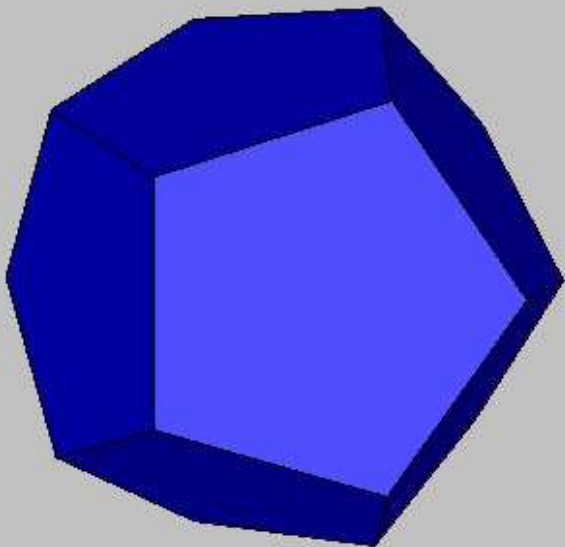
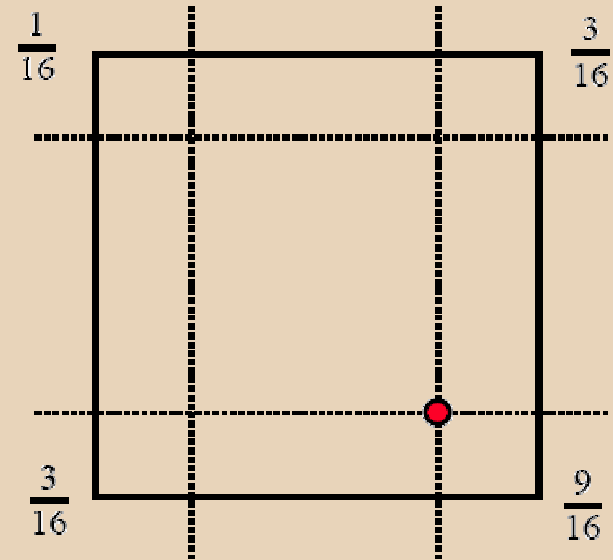
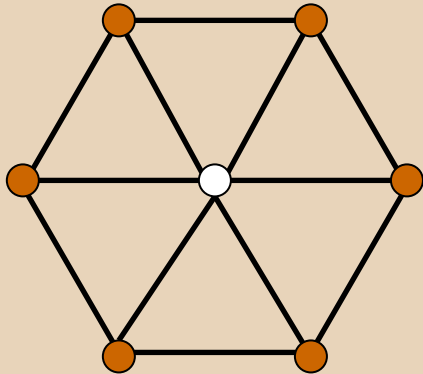


Schéma dělení Doo-Sabin

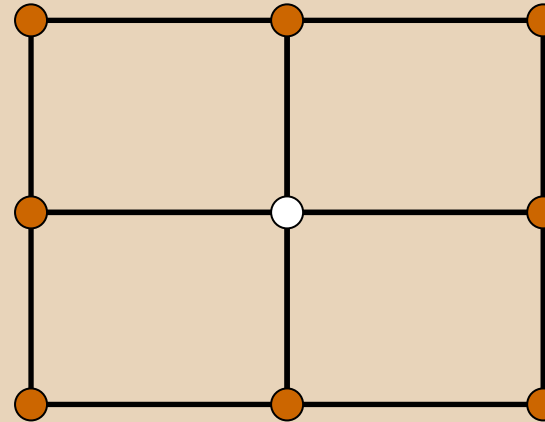
- Duální schéma
- Po 1. iteraci je stupeň všech vrcholů 4



Výjimečné body



Loop Subdivision
Stupeň vrcholu 6



Catmull-Clark Subdivision
Stupeň vrcholu 4

- Dělením sítě nevytvoříme nikdy výjimečný bod.
- Dělením sítě nikdy neodstraníme výjimečný bod.
- Pravidla pro počítání s výjimečnými body, abychom zachovali hladkost plochy.

Adaptivní dělení

- Dělíme jen některé části plochy.
- Kritéria pro adaptivní dělení
 - křivost
 - Rozlišení (velikost trojúhelníku < velikost pixelu)
 - LoD

