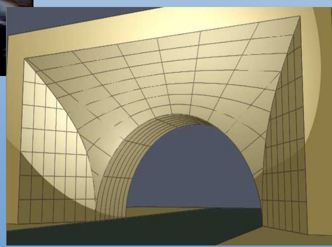
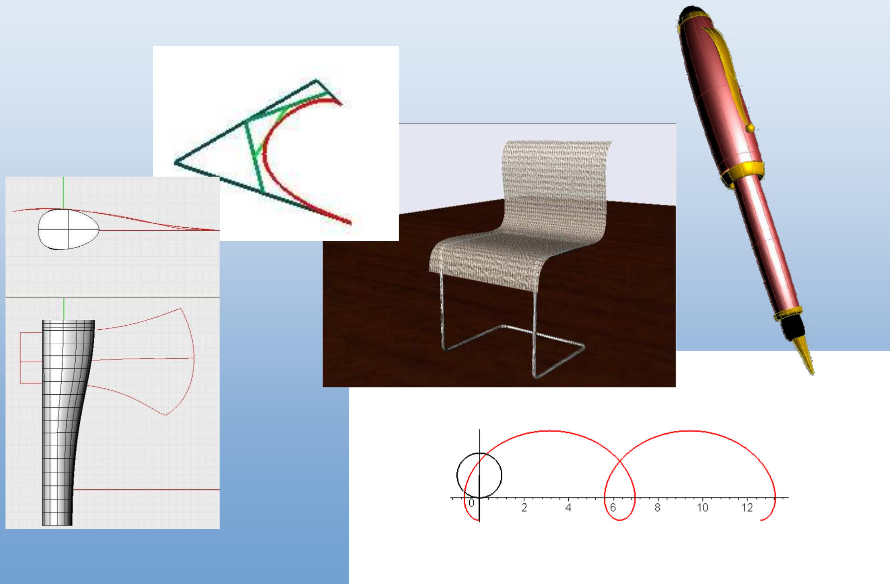
Geometrické modelování



Diferenciální geometrie křivek

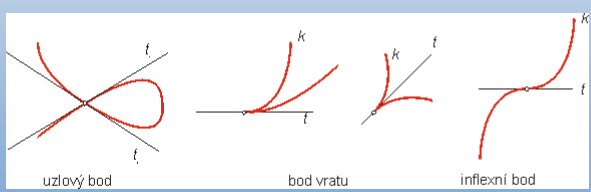


Křivky v počítačové grafice

- Geometrická interpretace
  Každý krok algoritmu má svůj geometrický význam
- Flexibilita
  kontrola nad průběhem křivky, možnost intuitivní editace křivky
- Konvexní obal
  křivka leží v konvexním obalu řídících bodů
- Jednotná reprezentace
  algoritmus pro generování a editaci různých typů křivek je jednotný
- Afinní invariantnost
  reprezentace křivky řídícím polygonem je invariantní v jakýchkoliv transformacích
- Efektivnost a numerická stabilita

Křivka třídy C^n

Množinu $k \subset E^3$ nazýváme křivkou třídy C^n jestliže souřadnice bodů křivky lze vyjádřit zobrazením $I \to R^3$, $t \to X(t)$ s vlastnostmi

- X(t) je spojitá na intervalu I
- X(t) je prostá $\quad X'(t) \neq (0,0,0)$
- X(t) má na intervalu I spojité derivace do n-tého řádu
- 

Rovinná křivka $\quad X(t) = [x(t); y(t)]$

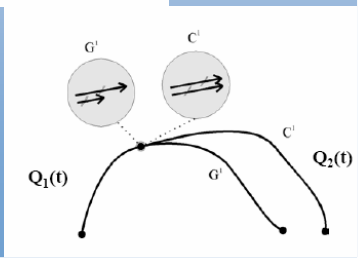
Prostorová křivka $\quad X(t) = [x(t); y(t); z(t)]$

Geometrická spojitost G^k

Úseky Q_1 a Q_2 splňují podmínku geometrické spojitosti G^k, pokud jsou G^{k-1} spojité (pro k>0) a $\exists\, h \neq 0$

$$\left[\frac{\partial^k Q_1}{\partial x^k} \quad \frac{\partial^k Q_1}{\partial y^k} \quad \frac{\partial^k Q_1}{\partial z^k}\right]_{x_0, y_0, z_0} =$$

$$= h.\left[\frac{\partial^k Q_2}{\partial x^k} \quad \frac{\partial^k Q_2}{\partial y^k} \quad \frac{\partial^k Q_2}{\partial z^k}\right]_{x_0, y_0, z_0}$$



Transformace parametru

Nechť je funkcí X(*t*) dána křivka *k* třídy C^n, $t \in I$. Na intervalu *J* nechť je definována funkce *t* = f(*u*) s následujícími vlastnostmi

1. f(*u*) je prostá na *J*
2. f(*u*) zobrazuje *J* na *I*
3. f(*u*) má spojité derivace až do n-tého řádu,

pak vektorová funkce Y(u)=X(f(*u*)) vyjadřuje tutéž křivku jako funkce X(*t*).

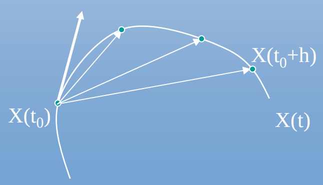
Tečna křivky

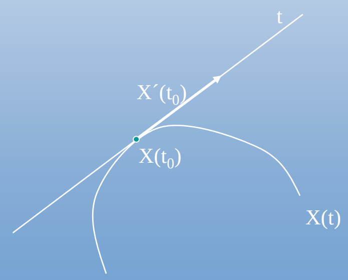
Tečna křivky X(*t*) v regulárním bodě X(t_0):

$$t \equiv X\left(t_0\right) + r \cdot X'\left(t_0\right),\ r \in R$$

Pojem tečny je nezávislý na parametrizaci.

$$\lim_{h \to 0} \frac{X\left(t_0 + h\right) - X\left(t_0\right)}{h} = X'\left(t_0\right)$$

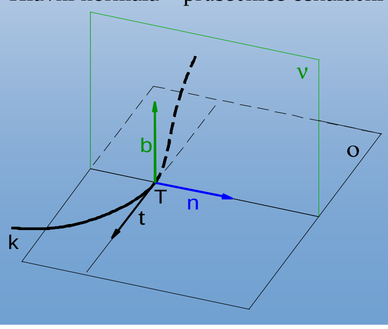




Frenetův doprovodný trojhran

- Tečná rovina křivky – každá rovina, která obsahuje tečnu křivky
- Normálová rovina křivky – rovina kolmá na tečnu křivky
- Oskulační rovina křivky – tečná rovina, určená vektory první a druhé derivace. $o \equiv X\left(t_0\right) + r \cdot X'\left(t_0\right) + s \cdot \vec{X}\left(t_0\right);\ r, s \in R$

- Normála křivky – každá přímka, která je kolmá na tečnu křivky a prochází daným bodem.
- Hlavní normála – průsečnice oskulační a normálové roviny.

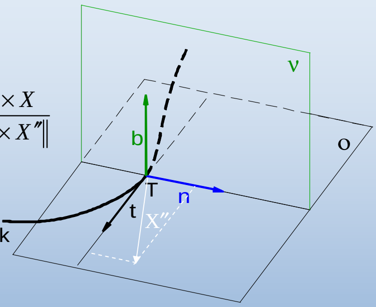


Frenetův doprovodný trojhran je tvořen jednotkovými směrovými vektory přímek *t, n, b*

- *t* – tečna
- *n* – hlavní normála
- *b* – binormála
- o = (*t*,*n*) – oskulační rovina
- ν = (*b*,*n*) – normálová rovina

Výpočet Frenetova trojhranu

- Jednotkový vektor tečny $t = \dfrac{X'}{\|X'\|}$
- Jednotkový vektor binormály $b = \dfrac{X' \times X}{\|X' \times X''\|}$
- Jednotkový vektor hlavní normály $n = t \times b$



Bod X(t_0) křivky X(t) se nazývá **inflexní** bod křivky, jestliže jsou vektory první a druhé derivace lineárně závislé.

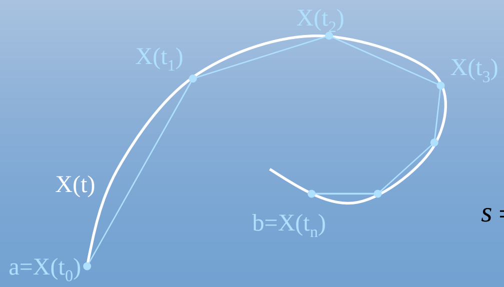
$$X'(t_0) = k \cdot X''(t_0)$$

V inflexním bodě není určen Frenetův doprovodný trojhran.

Délka oblouku křivky X(t) mezi body a=X(t_a) a X(t_b)

Délka lomené čáry

$$l = \sum_{i=0}^{n-1} \left\| X\left(t_{i+1}\right) - X\left(t_i\right) \right\|$$

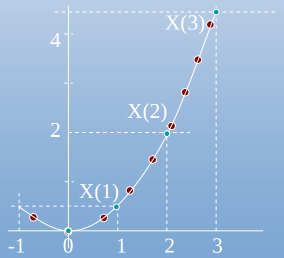


$$s = \int_{t_a}^{t_b} \left\| \vec{X}'(t) \right\| dt = \int_{t_a}^{t_b} \sqrt{X'(t) \cdot X'(t)}\, dt$$

Parametrizace obloukem

Funkci $s(t) = \int_{t_0}^{t} \left\| \vec{X}'(u) \right\| du$ nazýváme obloukem křivky.

- Říkáme, že křivka je parametrizovaná obloukem, když její parametr měří délku křivky. X(t)=X(t(*s*)), kde t = t(*s*) je funkce inverzní k oblouku křivky s(*t*).



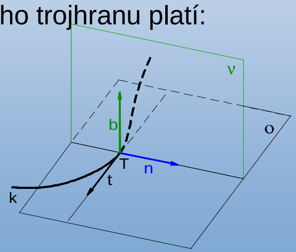
$$x = t$$
$$y = \frac{t^2}{2}, t \in R$$

Křivka parametrizovaná obloukem

- Křivka X(*s*) je parametrizovaná obloukem právě tehdy, když je v každém bodě vektor X´(*s*) jednotkový.
- Je-li křivka parametrizovaná obloukem, pak je vektor X″(*s*) směrový vektor hlavní normály. Velikost vektoru X″(*s*) je křivost *k* křivky.
- Jestliže je křivka X(*s*) parametrizovaná obloukem, pak pro jednotkové vektory Frenetova doprovodného trojhranu platí:

$$t = X'(s)$$
$$n = \frac{X''(s)}{\left\| X''(s) \right\|}$$
$$b = n \times t$$

$$\boxed{k = \left\| X''(s) \right\|}$$

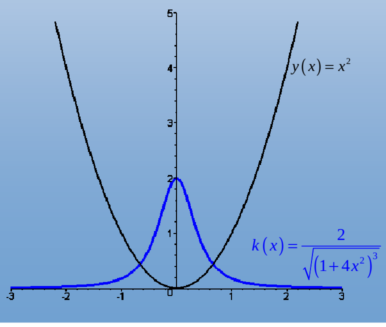


Bod křivky je inflexní právě tehdy, je-li v něm první křivost nulová.

Je-li bod V vrchol křivky, pak v něm má funkce první křivosti extrém.

Výpočet křivosti křivky

1. Je-li křivka X(*s*) parametrizovaná obloukem $k = \| X''(s) \|$
2. Je-li křivka X(*t*) dána obecným parametrem $k = \dfrac{\| X' \times X'' \|}{\sqrt{|X' \cdot X'|^3}}$
3. Je-li křivka dána explicitně, jako graf funkce *y* = f(*x*) $k = \dfrac{|y''|}{\sqrt{\left(1+(y')^2\right)^3}}$

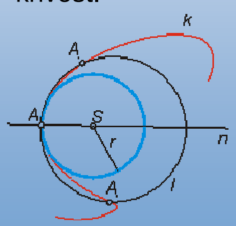


Př: Vypočítejte funkci křivosti paraboly $y = x^2$

$$y = x^2 \qquad y' = 2x \qquad y'' = 2 \qquad k = \frac{2}{\sqrt{(1+4x^2)^3}}$$

Oskulační kružnice křivky

- V bodě $T = X(t_0)$ sestrojme hlavní normálu křivky. Na hlavní normále sestrojme bod *O*, $|OT| = 1/k$. Kružnici se středem *O* a poloměrem $r = 1/k$ ležící v oskulační rovině křivky nazýváme oskulační kružnice křivky v bodě *T*.
- Oskulační kružnice a daná křivka mají v bodě *T* stejnou tečnu a křivost.



$r = 1/k$ – poloměr křivosti

S – střed křivosti

Př: Určete oskulační kružnici paraboly $2py = x^2$ ve vrcholu V[0,0].

$$y = \frac{x^2}{2p} \qquad y' = \frac{x}{p} \qquad y'' = \frac{1}{p}$$

$$k = \frac{1}{p\sqrt{\left(1+\left(\frac{x}{p}\right)^2\right)^3}}$$

$$k(0) = \frac{1}{p}$$

$$r(0) = p, \qquad O = [0, p]$$

Dotyk křivek

- O dvou křivkách *k* a *l* řekneme, že mají v bodě P_0 dotyk n-tého řádu (n+1 bodový) jestliže pro přirozené parametrizace *k*=X(*s*), *l*=X(*r*) existují hodnoty parametru s_0, r_0, pro které platí

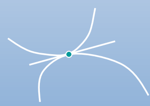
$$X(r_0) = X(s_0) = P_0$$

Dotyk nultého řádu

$$\frac{dX}{dr}(r_0) = \frac{dX}{ds}(s_0)$$

$$\frac{d^2X}{dr^2}(r_0) = \frac{d^2X}{ds^2}(s_0)$$

Dotyk 1.řádu



$$\dots$$

$$\frac{d^nX}{dr^n}(r_0) = \frac{d^nX}{ds^n}(s_0)$$

$$\frac{d^{n+1}X}{dr^{n+1}}(r_0) \neq \frac{d^{n+1}X}{ds^{n+1}}(s_0)$$

Dotyk 2. řádu