ZÁPADOČESKÁ
UNIVERZITA
V PLZNI

Diferenciální geometrie

Pomocný učební text – díl II

František Ježek

Plzeň, červen 2005

Obsah

Kapitola 2

Plochy

2.1 Vyjádření plochy

Pro parametr křivky jsme zpravidla užívali označení písmenem t. Vzhledem k tomu, že pro plochy použijeme tenzorového zápisu a tzv. Einsteinovy sumační konvence, označíme parametry (souřadnice v parametrickém prostoru) pomocí proměnných u^1 a u^2. Použití horních indexů je do jisté míry neobvyklé, neboť hrozí záměna s mocninou. Pokud by se v textu objevila mocnina, použijeme proto závorek.

Definice 1. *Regulární plochou* třídy C_n v E_3 rozumíme množinu $\mathcal{P} \subset E_3$, pro kterou existuje vektorová funkce $\boldsymbol{P}(u^1, u^2)$, $(u^1, u^2) \subset \Omega$, kde Ω je oblast (otevřená kompaktní množina) taková, že

(a) $\boldsymbol{P} : \Omega \to \mathcal{P}$ je zobrazení na množinu,

(b) $\boldsymbol{P}$ je třídy C_n $(n \geq 3)$,

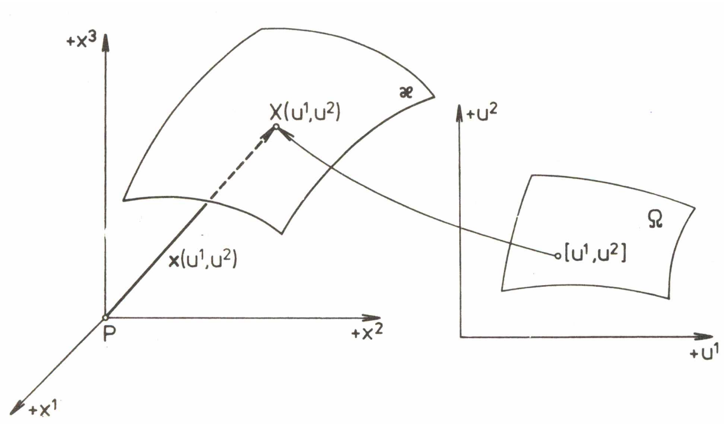
(c) $\frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial u^1}$ a $\frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial u^2}$ jsou lineárně nezávislé ve všech bodech oblasti Ω,

(d) $(u_0^1, u_0^2) \in \Omega$, $(u_1^1, u_1^2) \in \Omega$ a $(u_0^1, u_0^2) \neq (u_1^1, u_1^2) \Rightarrow \boldsymbol{P}(u_0^1, u_0^2) \neq \boldsymbol{P}(u_1^1, u_1^2)$.

Poznámka 1. Pro regulární plochu ve všech bodech vzhledem k bodu c) definice platí

$$|\frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial u^1} \times \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial u^2}| \neq 0.$$

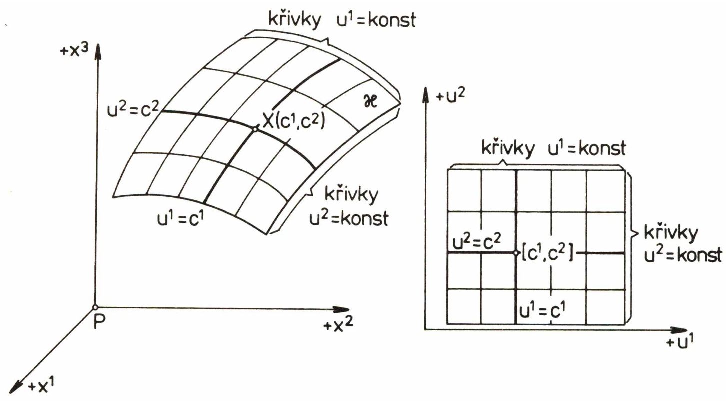
Podobně jako u regulární křivky proběhne zobecnění a zavedení singulárních bodů (podmínka (c) u křivek i ploch), kde v bodě vratu křivky neexistuje tečna a ve vrcholu plochy neexistuje tečná rovina.



Obrázek 2.1: K definici plochy

Definice 2. Nechť je dána plocha určená vektorovou funkcí $\boldsymbol{P}(u^1, u^2)$ na oblasti Ω a nechť jsou dány funkce $\alpha^1(t)$ a $\alpha^2(t)$, $t \in \mathfrak{I}$, určující křivku v Ω, pak $\boldsymbol{P}(\alpha^1(t), \alpha^2(t))$ nazýváme křivkou na ploše.

Je-li $\alpha^1(t)$ nebo $\alpha^2(t)$ konstantní, nazýváme křivku parametrickou křivkou plochy.



Obrázek 2.2: K definici parametrických křivek plochy

Poznámka 2. Zpravidla $\Omega = \mathfrak{I}_u \times \mathfrak{I}_v$, tj. jde o dvourozměrný interval. Jinak může dojít k rozpadu parametrické křivky.

Věta 1. Každým bodem plochy procházejí dvě parametrické křivky, které se nedotýkají.

Důkaz. Plyne z definice 1 bodu (c). $\square$

Poznámka 3. Stejně jako u křivek i u ploch se objevuje problém odstranitelných a neodstranitelných singularit.

Poznámka 4. Kromě vektorových funkcí mají plochy i *implicitní* vyjádření $F(x, y, z) = 0$. Vyjádření $x = f_1(y, z)$ nebo $y = f_2(x, z)$ nebo $z = f_3(x, y)$ se nazývá *explicitní*. Lokálně jsou možné vzájemné převody.

2.2 Transformace parametrů

Věta 2. Je dána plocha $\boldsymbol{P}(u^1, u^2)$ na oblasti Ω a nechť je dáno zobrazení oblasti $\overline{\Omega}$ na Ω vztahy $u^1 = \varphi_1(\overline{u}^1, \overline{u}^2)$ a $u^2 = \varphi_2(\overline{u}^1, \overline{u}^2)$. Nechť

(a) φ_1, φ_2 jsou třídy C_n,

(b) na $\overline{\Omega}$ je Jakobián
$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \overline{u}^1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial \overline{u}^1} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial \overline{u}^2} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial \overline{u}^2} \end{vmatrix} \neq 0,$$

(c) zobrazení je prosté,

pak plochy $\boldsymbol{P}(u^1, u^2)$ a $\boldsymbol{P}(\overline{u}^1, \overline{u}^2) = \boldsymbol{P}\Big(\varphi_1(\overline{u}^1, \overline{u}^2), \varphi_2(\overline{u}^1, \overline{u}^2)\Big)$ splývají.

Důkaz. Ověřením podmínek definice 1. □

Definice 3. *Einsteinovou sumační konvencí* rozumíme úmluvu, podle níž ve vztazích, kde je týž index použit zároveň jako dolní a horní, provádíme podle tohoto indexu sčítání.

Příklad 1. Určíme $\dfrac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial \overline{u}^1}$ a $\dfrac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial \overline{u}^2}$.

Označme $\varphi_1 \sim u^1(\cdot)$; $\varphi_2 \sim u^2(\cdot)$ a proveďme výpočet (za vyjádření pomocí Einsteinovy sumační konvence).

$$\frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial \overline{u}^1} = \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial u^1} \cdot \frac{\partial u^1}{\partial \overline{u}^1} + \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial u^2}{\partial \overline{u}^1}$$
$$\frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial \overline{u}^2} = \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial u^1} \cdot \frac{\partial u^1}{\partial \overline{u}^2} + \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial u^2}{\partial \overline{u}^2}$$

Použijeme-li zápis $\dfrac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial u^i} = \boldsymbol{P}_i$, lze psát
$$\frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial \overline{u}^i} = \boldsymbol{P}_1 \cdot \frac{\partial u^1}{\partial \overline{u}^i} + \boldsymbol{P}_2 \cdot \frac{\partial u^2}{\partial \overline{u}^i}$$

a v Einsteinově sumaci
$$\frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial \overline{u}^i} = \boldsymbol{P}_j \cdot \frac{\partial u^j}{\partial \overline{u}^i} .$$

2.3 Tečné vlastnosti ploch

Věta 3. Všechny tečny regulárních křivek na regulární ploše v daném bodě leží v jedné rovině.

Důkaz. Uvažujme křivku $\big(u^1(t), u^2(t)\big)$ na ploše $\boldsymbol{P}\big(u^1, u^2\big)$. Určíme

$$\frac{d\boldsymbol{P}}{dt} = \boldsymbol{P}_1 \cdot \frac{du^1}{dt} + \boldsymbol{P}_2 \cdot \frac{du^2}{dt} = \boldsymbol{P}_i \cdot \frac{du^i}{dt}\,.$$

Tedy tečný vektor je lineární kombinací nekolineárních vektorů $\boldsymbol{P}_1$ a $\boldsymbol{P}_2$. K tomu, aby šlo o regulární křivku, stačí, aby $(\frac{du^1}{dt}, \frac{du^2}{dt}) \neq \mathbf{0}$ a zobrazení bylo třídy C_1 a bylo prosté. □

Definice 4. Rovinu

$$\boldsymbol{R}(\alpha^1, \alpha^2) = \boldsymbol{P} + \alpha^1 \boldsymbol{P}_1 + \alpha^2 \boldsymbol{P}_2 = \boldsymbol{P} + \alpha^i \boldsymbol{P}_i$$

nazýváme *tečná rovina plochy.*

Přímku

$$\boldsymbol{Q}(t) = \boldsymbol{P} + t(\boldsymbol{P}_1 \times \boldsymbol{P}_2)$$

normálou plochy a vektor $\lambda(\boldsymbol{P}_1 \times \boldsymbol{P}_2)$, $\lambda \neq 0$, *normálovým vektorem* v daném bodě.

Věta 4. Nechť je plocha dána implicitním vyjádřením $f(x^1, x^2, x^3) = 0$. Pak jejím normálovým vektorem (v daném bodě) je vektor $\boldsymbol{n} = (f_1, f_2, f_3)$, jehož složky jsou dány parciálními derivacemi funkce f.

Důkaz. V okolí daného bodu existuje parametrizace

$$x_1(u^1, u^2), x_2(u^1, u^2), x_3(u^1, u^2).$$

Derivujeme $f\big(x_1(u^1, u^2), x_2(u^1, u^2), x_3(u^1, u^2)\big) = 0$ podle u^1 a u^2

$$\frac{\partial f}{\partial u^1} = f_1 \cdot \frac{\partial x_1}{\partial u^1} + f_2 \cdot \frac{\partial x_2}{\partial u^1} + f_3 \cdot \frac{\partial x_3}{\partial u^1} = \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{P}_1 = 0\,,$$

podobně $\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{P}_2 = 0$. Vektor $\boldsymbol{n}$ je tedy ortogonální k $\boldsymbol{P}_1$ i $\boldsymbol{P}_2$ a tvrzení je dokázáno. □

2.4 Obalové plochy

Je dán jednoparametrický systém ploch (regulárních)

$$f(x_1, x_2, x_3, \alpha) = 0, \ \alpha \ \in \ \mathcal{I}.$$

Obalová plocha κ se v každém bodě dotýká některé z ploch a naopak každá plocha dané jednoparametrické soustavy se dotýká κ. Navíc předpokládáme, že plochy nemají společné části.

Věta 5. Pro obalovou plochu $f(x_1, x_2, x_3, \alpha)$ platí: pro bod $[x_1, x_2, x_3]$ ležící na obalové ploše existuje α tak, že

$$f(x_1, x_2, x_3, \alpha) = 0 \quad \text{a} \quad f_\alpha(x_1, x_2, x_3, \alpha) = 0\,.$$

Důkaz. Uvažujme obalovou plochu $\boldsymbol{P}(u, v)$.

Existuje α tak, že $f(x_1, x_2, x_3, \alpha) \ = \ 0$ se obalové plochy dotýká. α je rovněž funkcí u a v. Derivujme obě strany rovnice

$$f\big(x_1(u, v), x_2(u, v), x_3(u, v), \alpha(u, v)\big) = 0$$

podle u a v. Dostaneme

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial x_3} \cdot \frac{\partial x_3}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial u} = 0\,,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial x_3} \cdot \frac{\partial x_3}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial v} = 0\,.$$

Součet prvních tří členů je nulový:

$$(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3}) = \boldsymbol{n}$$

a vektory

$$(\frac{\partial x_1}{\partial u}, \frac{\partial x_2}{\partial u}, \frac{\partial x_3}{\partial u}) \quad \text{a} \quad (\frac{\partial x_1}{\partial v}, \frac{\partial x_2}{\partial v}, \frac{\partial x_3}{\partial v})$$

jsou ortogonální k $\boldsymbol{n}$. Tedy

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial u} = 0 \quad \text{a} \quad \frac{\partial f}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial v} = 0,$$

tj. buď $\frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0$, nebo $\frac{\partial \alpha}{\partial u} = \frac{\partial \alpha}{\partial v} = 0$.

Vyloučíme druhou možnost, pak by totiž $\alpha = konst.$ v nějakém okolí, což znamená, že splývá část obalové a tvořící plochy. Proto musí být

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = f_\alpha(x_1, x_2, x_3, \alpha) = 0$$

a věta je dokázána. □

Definice 5. Je-li pro zvolené α rovnicemi

$$f(x_1, x_2, x_3, \alpha) = 0 \quad \text{a} \quad f_\alpha(x_1, x_2, x_3, \alpha) = 0$$

popsána křivka, nazýváme ji *charakteristika obalové plochy.*

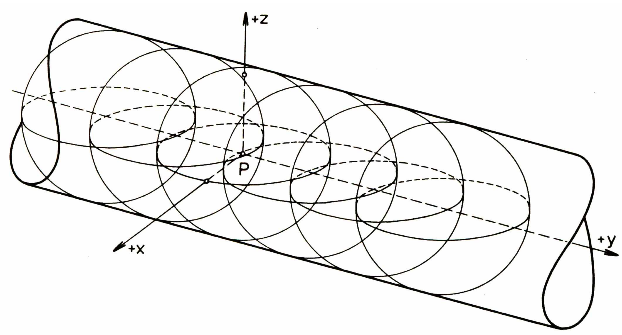
Příklad 2. Uvažujme systém jednotkových kulových ploch

$$(x_1 - \alpha)^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0\,.$$

Určete obalovou plochu a charakteristiku.

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = 2(x_1 - \alpha) \cdot (-1) = 0 \Rightarrow x_1 - \alpha = 0.$$

Rovnice obalové plochy je $x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0$, což je v E_3 rotační válcová plocha a v E_2 charakteristika (kružnice v rovině $x_1 = \alpha$).



Obrázek 2.3: Válcová plocha jako obálka jednoparametrické soustavy kulových ploch

2.5 Rozvinutelné plochy

Definice 6. Regulární plocha, která je obalovou plochou jednoparametrického systému rovin, se nazývá *rozvinutelná plocha.*

Uvažujme jednoparametrický systém rovin ve tvaru

$$n_1(\alpha)x_1 + n_2(\alpha)x_2 + n_3(\alpha)x_3 + d(\alpha) = 0. \tag{2.1}$$

Z věty 5 plyne

$$n_1'(\alpha)x_1 + n_2'(\alpha)x_2 + n_3'(\alpha)x_3 + d'(\alpha) = 0. \tag{2.2}$$

Nechť $\boldsymbol{n}(\alpha) \cdot \boldsymbol{n}(\alpha) = 1$. Derivováním tohoto vztahu získáme

$$2\boldsymbol{n}(\alpha) \cdot \boldsymbol{n}'(\alpha) = 0,$$

z čehož plyne ortogonalita (předpokládáme nenulovost $\boldsymbol{n}'$) vektorů $\boldsymbol{n}$ a $\boldsymbol{n}'$.

Uvažujme soustavu

$$\begin{array}{ccccccccc} n_1(\alpha)x_1 & + & n_2(\alpha)x_2 & + & n_3(\alpha)x_3 & + & d(\alpha) & = 0\,, \\ n_1'(\alpha)x_1 & + & n_2'(\alpha)x_2 & + & n_3'(\alpha)x_3 & + & d'(\alpha) & = 0\,, \\ n_1''(\alpha)x_1 & + & n_2''(\alpha)x_2 & + & n_3''(\alpha)x_3 & + & d''(\alpha) & = 0 \end{array} \tag{2.3}$$

a zkoumejme její řešitelnost pro neznámé x_1, x_2, x_3.

Mohou nastat tyto případy (tomu budou odpovídat jednotlivé typy rozvinutelných ploch):

(i) Nechť pro libovolné α je determinant matice soustavy (2.3) nulový. Přičemž označme $\boldsymbol{m}(\alpha)$ jednotkový vektor průsečnice rovin (2.1) a (2.2). Nutně $\boldsymbol{m}(\alpha) \cdot \boldsymbol{n}(\alpha) = 0$ a $\boldsymbol{m}(\alpha) \cdot \boldsymbol{n}'(\alpha) = 0$, pak ale vzhledem k nulovosti determinantu matice soustavy (2.3) je $\boldsymbol{n}''(\alpha)$ lineární kombinací vektorů $\boldsymbol{n}(\alpha)$ a $\boldsymbol{n}'(\alpha)$. Tedy $\boldsymbol{m}(\alpha) \cdot \boldsymbol{n}''(\alpha) = 0$.

Ukážeme, že $\boldsymbol{m}'(\alpha) = 0$ (půjde o válcovou plochu).

$$[\boldsymbol{n}(\alpha) \cdot \boldsymbol{m}(\alpha)]' = \underbrace{\boldsymbol{n}' \cdot \boldsymbol{m}}_{=0} + \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{m}' = 0 \quad \Rightarrow \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{m}' = 0,$$

$$[\boldsymbol{n}'(\alpha) \cdot \boldsymbol{m}(\alpha)]' = \underbrace{\boldsymbol{n}'' \cdot \boldsymbol{m}}_{=0} + \boldsymbol{n}' \cdot \boldsymbol{m}' = 0 \quad \Rightarrow \boldsymbol{n}' \cdot \boldsymbol{m}' = 0.$$

$\boldsymbol{m}'$ má nulový skalární součin s $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{n}'$ i s $\boldsymbol{m}$

$$([\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{m}]' = 2\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{m}' = [1]' = 0),$$

tj. s prvky repéru, pak je ale $\boldsymbol{m}'$ nulový vektor, směr průsečnice rovin se nemění. Plocha je tedy tvořena navzájem rovnoběžnými přímkami. Jde tudíž o *obecnou válcovou plochu.*

(ii) Nechť determinant matice soustavy (2.3) je pro libovolné α nenulový a řešení nezávisí na α, tj. je jím bod. Pak ale všechny přímky dané soustavou rovnic (2.1) a (2.2) procházejí tímto bodem. Jde tedy o *obecnou kuželovou plochu.*

(iii) Poslední možností je situace, kdy determinant matice soustavy (2.3) je pro libovolné α nenulový a řešení závisí na α, kde

$$\boldsymbol{P}(\alpha) = \big(x_1(\alpha), x_2(\alpha), x_3(\alpha)\big)$$

popisuje křivku a platí

$$\boldsymbol{P}(\alpha)\cdot\boldsymbol{n}^{(i)}(\alpha)+d^{(i)}(\alpha)=0,\quad i=0,1,2\,.$$

Derivováním tohoto vztahu pro $i=0$

$$\boldsymbol{P}'(\alpha)\cdot\boldsymbol{n}(\alpha)+\boldsymbol{P}(\alpha)\cdot\boldsymbol{n}'(\alpha)+d'(\alpha)=0.$$

Podle (2.3) ale

$$\boldsymbol{P}(\alpha)\cdot\boldsymbol{n}'(\alpha)+d'(\alpha)=0,$$

tedy z rozdílu výše uvedených rovnic vyplývá, že

$$\boldsymbol{P}'(\alpha)\cdot\boldsymbol{n}(\alpha)=0.$$

Podobně lze ze vztahů pro derivace ($i=1$) odvodit

$$\boldsymbol{P}'(\alpha)\cdot\boldsymbol{n}'(\alpha)=0.$$

Tedy $\boldsymbol{P}'(\alpha)$ je ortogonální k $\boldsymbol{n}(\alpha)$ i $\boldsymbol{n}'(\alpha)$, tj. je kolineární s vektorem $\boldsymbol{m}$ průsečnice (2.1) a (2.2). Tedy $\boldsymbol{P}(\alpha)$ je křivka, jejíž tečny jsou površkami obalové plochy - je to *plocha tečen prostorové křivky.*

Věta 6. Rozvinutelnými plochami jsou válcové plochy, kuželové plochy a plochy tečen prostorových křivek.

Důkaz. Důkaz je uveden před větou. □

2.6 Vektory na ploše

Je dána plocha $\boldsymbol{P}(u^1,u^2)$, kde $\boldsymbol{P}_1$, $\boldsymbol{P}_2$ jsou souřadnicové vektory v tečné rovině. $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{P}_i\cdot a^i$ je vektor ze zaměření tečné roviny.

Definice 7. Je dána plocha $\boldsymbol{P}(u^1,u^2)$. *Vektorem na ploše* rozumíme vektor

$$\boldsymbol{a}=\sum\boldsymbol{P}_i\cdot a^i=\boldsymbol{P}_i\cdot a^i\ ;\quad \boldsymbol{P}_i=\frac{\partial\boldsymbol{P}}{\partial u^i}.$$

Čísla $a^i,\ i=1,2,$ nazýváme *kontravariantní souřadnice* vektoru $\boldsymbol{a}$.

Ukažme, jak se při změně parametrizace mění kontravariantní souřadnice. Nechť $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{P}_i\cdot a^i$ a změnou parametrizace $\boldsymbol{a}=\overline{\boldsymbol{P}}_i\cdot\overline{a}^i$. Vztahy mezi parametrizacemi jsou

$$\boldsymbol{P}_i\cdot a^i=\overline{\boldsymbol{P}}_i\cdot\overline{a}^i\quad,\quad \overline{\boldsymbol{P}}(\overline{u}^1,\overline{u}^2)=\boldsymbol{P}(u^1(\overline{u}^1,\overline{u}^2),u^2(\overline{u}^1,\overline{u}^2)),$$

$$\overline{\boldsymbol{P}}_1=\boldsymbol{P}_1\cdot\frac{\partial u^1}{\partial\overline{u}^1}+\boldsymbol{P}_2\cdot\frac{\partial u^2}{\partial\overline{u}^1}=\boldsymbol{P}_i\cdot\frac{\partial u^i}{\partial\overline{u}^1}.$$

Podobně můžeme určit $\boldsymbol{P}_2$ a po dosazení máme větu.

Věta 7. Při transformaci parametrizace plochy se kontravariantní souřadnice vektoru na ploše transformují pomocí vztahů

$$a^i = \frac{\partial u^i}{\partial \overline{u}^j} \cdot \overline{a}^j\,, \qquad \overline{a}^j = \frac{\partial \overline{u}^j}{\partial u^i} \cdot a^i\,.$$

Důkaz. Důkaz je uveden před větou. □

Příklad 3. Uvažujme rovinu a proveďme změnu souřadnic, tj. změnu parametrizace roviny.

$$\begin{array}{lll} x = u & \overline{u} = u + v & u = \overline{u} - \overline{v} \\ y = v & \overline{v} = v & v = \overline{v} \\ z = 0 & & \end{array}$$

$$\boldsymbol{P}_1 = (1,0,0) \quad ; \quad \boldsymbol{P}_2 = (0,1,0) \quad ; \quad \overline{\boldsymbol{P}}_1 = (1,0,0) \quad ; \quad \overline{\boldsymbol{P}}_2 = (-1,1,0)$$

$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial u} = 1 \quad ; \quad \frac{\partial \overline{u}}{\partial v} = 1 \quad ; \quad \frac{\partial \overline{v}}{\partial u} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial \overline{v}}{\partial v} = 1$$

$$\begin{array}{rcl} \overline{a}^1 = & 1 \cdot a^1 + 1 \cdot a^2 & ; \quad \overline{a}^2 = 0 \cdot a^1 + 1 \cdot a^2 \\ \overline{a}^1 = & a^1 + a^2 & ; \quad \overline{a}^2 = a^2 \end{array}$$

$$\boldsymbol{a} = (1,1) \;\Rightarrow\; \overline{\boldsymbol{a}} = (2,1)$$

Uvažujme skalární součin $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ (vektorů na ploše) a vyjádřeme ho v kontravariantních souřadnicích, kde $\boldsymbol{a} = a^i \cdot \boldsymbol{P}_i$; $\boldsymbol{b} = b^i \cdot \boldsymbol{P}_i$.

Platí

$$\begin{array}{rcl} \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} & = & a^i \cdot b^j \cdot \boldsymbol{P}_i \boldsymbol{P}_j \\ \text{a označme } g_{ij} & = & \boldsymbol{P}_i \boldsymbol{P}_j, \text{ potom} \\ \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} & = & a^i \cdot b^j \cdot g_{ij} \end{array}$$

Věta 8. Platí

$$g = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} \;>\; 0.$$

Důkaz.

$$\boldsymbol{P}_i \cdot \boldsymbol{P}_j = |\boldsymbol{P}_i| \cdot |\boldsymbol{P}_j| \cdot \cos\varphi_{ij},$$

pro $\quad i \neq j \quad$ je $\quad \varphi_{ij} \neq 0, \quad \varphi_{ij} \neq \pi \quad$ (tj. $\boldsymbol{P}_i$, $\boldsymbol{P}_j$ nejsou kolineární).

$$g \;=\; \begin{vmatrix} |\boldsymbol{P}_1|^2 & |\boldsymbol{P}_1| \cdot |\boldsymbol{P}_2| \cdot \cos\varphi_{12} \\ |\boldsymbol{P}_1| \cdot |\boldsymbol{P}_2| \cdot \cos\varphi_{12} & |\boldsymbol{P}_2|^2 \end{vmatrix} \;=$$

$$= |\boldsymbol{P}_1|^2 \cdot |\boldsymbol{P}_2|^2 \cdot (1 - \cos^2\varphi_{12}) = |\boldsymbol{P}_1|^2 \cdot |\boldsymbol{P}_2|^2 \cdot (sin^2\varphi_{12}) \;>\; 0.$$

□

Definice 8. Označme $a_i = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{P}_i$ a nazvěme ji *kovariantní souřadnicí vektoru* $\boldsymbol{a}$.

Odvodíme vztah mezi kovariantními a kontravariantními souřadnicemi.

$$a_i = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{P}_i = \boldsymbol{P}_i \cdot \boldsymbol{P}_j \cdot a^j$$

$$a_i = g_{ij} \cdot a^j$$

Matice (g_{ij}) je dle věty 8 regulární. Jelikož

$$(a_1, a_2) \;=\; (a^1, a^2) \cdot \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix},$$

proto

$$(a^1, a^2) \;=\; (a_1, a_2) \cdot \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}^{-1}.$$

Značíme: $g^{11} = \frac{g_{22}}{g} \quad ; \quad g^{22} = \frac{g_{11}}{g} \quad ; \quad g^{12} = g^{21} = -\frac{g_{12}}{g}$

$$a^i = g^{ij} \cdot a_j$$

Věta 9. Pro převody mezi kontravariantními a kovariantními souřadnicemi platí vztahy

$$a_i = g_{ij} \cdot a^j \quad \text{a} \quad a^i = g^{ij} \cdot a_j,$$

kde $g_{ij} = \boldsymbol{P}_i \cdot \boldsymbol{P}_j$ a matice (g^{ij}) je inverzní k (g_{ij}).

Pro převod mezi parametrizacemi platí

$$\overline{a}_j = \frac{\partial u^i}{\partial \overline{u}^j} \cdot a^i \quad ; \quad a_i = \frac{\partial \overline{u}^j}{\partial u^i} \cdot \overline{a}^j.$$

Důkaz. Důkaz je uveden před větou. □

2.7 Tenzory na ploše a tenzorová pole

Definice 9. Tenzorem řádu n v bodě plochy rozumíme 2^n čísel $a^{j_1 \dots j_h}_{i_1 \dots i_d}$, $h + d = n$ (indexy nabývají hodnoty 1 nebo 2), jestliže se při změně parametrizace plochy transformují pomocí vztahu

$$\overline{a}^{n_1 \dots n_h}_{m_1 \dots m_d} = \frac{\partial u^{i_1}}{\partial \overline{u}^{m_1}} \cdots \frac{\partial u^{i_d}}{\partial \overline{u}^{m_d}} \cdot \frac{\partial \overline{u}^{n_1}}{\partial u^{j_1}} \cdots \frac{\partial \overline{u}^{n_h}}{\partial u^{j_h}} \cdot a^{j_1 \dots j_h}_{i_1 \dots i_d}$$

Tenzor nultého řádu se nazývá skalár. Tenzor prvního řádu se nazývá vektor. Říkáme, že $a^{j_1 \dots j_h}_{i_1 \dots i_d}$ je d krát kovariantní a h krát kontravariantní.

Věta 10. g_{ij} je dvakrát kovariantní kvadratický tenzor. g^{ij} je dvakrát kontravariantní tenzor.

Důkaz. Důkaz plyne z výpočtů před větou 9. □

Definice 10. Řekněme, že

(a) tenzor je symetrický, je-li nezávislý k záměně indexů,

(b) tenzor je antisymetrický, mění-li se znaménko hodnoty při záměně indexů,

(c) součtem dvou tenzorů rozumíme tenzor, jehož složky jsou součtem složek sčítanců,

(d) součinem tenzorů rozumíme tenzor, jehož složky jsou součinem složek daných tenzorů, tj. např.

$$c^{lm}_{ijk} = a_{ij} \cdot b^{lm}_{k},$$

(e) úžením tenzoru rozumíme vytvoření tenzoru eliminací jednoho dolního a jednoho horního indexu sečtením

$$a^{kl}_{ij} \to b^{l}_{j} = a^{il}_{ik} = a^{1l}_{1k} + a^{2l}_{2k},$$

(f) zvýšením, resp. snížením indexu rozumíme

$$\begin{aligned} a^{\dots i \dots}_{\dots\ \dots} &= g^{ij} \cdot a^{\dots\ \dots}_{\dots j \dots} \\ a^{\dots\ \dots}_{\dots i \dots} &= g_{ij} \cdot a^{\dots j \dots}_{\dots\ \dots} \end{aligned}$$

Poznámka 5. Měli bychom dokázat, že obrazy tenzorů v daných operací jsou opět tenzory. Jde ovšem o rutinní početní cvičení.

Definice 11. Je-li v každém bodě plochy definován tenzor, mluvíme o tenzorovém poli. Speciálně o skalárním poli, resp. vektorovém poli, pro tenzory nultého a prvního řádu.

2.8 První základní forma plochy

Definice 12. Kvadratickou formu

$$\varphi(x^1, x^2) = g_{ij}\, x^i x^j$$

nazýváme první základní formou plochy. Tenzor g_{ij} je prvním (neboli metrickým) tenzorem plochy.

Věta 11. Nechť $\boldsymbol{R}(t) = \boldsymbol{P}(u^1(t), u^2(t))$ je křivka na ploše a $t \in \langle t_0, t_1 \rangle$, pak integrál

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} \sqrt{g_{ij} \frac{\mathrm{d}u^i}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}u^j}{\mathrm{d}t}}\, \mathrm{d}t$$

určuje délku oblouku křivky pro $t \in \langle t_0, t_1 \rangle$.

Důkaz.

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} \sqrt{\boldsymbol{R}' \cdot \boldsymbol{R}'}\, \mathrm{d}t = \int\limits_{t_0}^{t_1} \sqrt{\left(\boldsymbol{P}_i \cdot \frac{\mathrm{d}u^i}{\mathrm{d}t}\right)^2}\, \mathrm{d}t = \int\limits_{t_0}^{t_1} \sqrt{g_{ij} \frac{\mathrm{d}u^i}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\mathrm{d}u^j}{\mathrm{d}t}}\, \mathrm{d}t$$

□

Definice 13. Nechť jsou dány plochy $\boldsymbol{P}(u^1, u^2)$ nad oblastí ω a $\boldsymbol{R}(v^1, v^2)$ nad oblastí λ. Vzájemně jednoznačné zobrazení $\varphi : \boldsymbol{P} \to \boldsymbol{R}$ nazýváme *regulární*, jestliže na jedné z ploch lze provést transformaci τ parametrů tak, že odpovídající si body mají stejné křivočaré souřadnice, tj.

$$\varphi(\boldsymbol{P}(u^1, u^2)) = \boldsymbol{R}(\tau(v^1, v^2)).$$

Definice 14. Regulární zobrazení dvou ploch nazýváme *rozvinutím (délkojevným zobrazením)*, právě když obrazem křivky je křivka stejné délky.

Věta 12. Regulární zobrazení ploch $\boldsymbol{P}(u^1, u^2)$, $\boldsymbol{R}(u^1, u^2)$ nad oblastí Ω je rozvinutím, právě když v odpovídajících si bodech jsou stejné kovariantní souřadnice prvních základních tenzorů.

Důkaz. (a) Předpokládáme rovnost tenzorů, tj $g_{ij} = \widehat{g}_{ij}$ v odpovídajících si bodech. Pak se samozřejmě rovnají i následující integrály

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} \sqrt{g_{ij}\, \mathrm{d}u^i \mathrm{d}u^j}\, \mathrm{d}t = \int\limits_{t_1}^{t_2} \sqrt{\widehat{g}_{ij}\, \mathrm{d}u^i \mathrm{d}u^j}\, \mathrm{d}t\,,$$

kde t je parametr na křivce a na t závisí i ostatní veličiny pod odmocninou.

(b) Předpokládáme, že se rovná délka obrazu a vzoru křivky a dokazujeme rovnost tenzorů v bodech křivky. Důkaz vedeme sporem. Nechť v bodě $(\overline{u}^1, \overline{u}^2)$ se nerovnají souřadnice tenzoru na ploše $\boldsymbol{P}$ a $\boldsymbol{R}$. Ze spojitosti plyne, že souřadnice se liší v jistém okolí $(\overline{u}^1, \overline{u}^2)$. Tak najdeme křivku, která má rozdílnou délku vzoru a obrazu, což je spor.

□

Věta 13. Pro úhel α dvou křivek na ploše platí

$$\cos\alpha = \frac{g_{ij}\,\mathrm{d}u^i\mathrm{d}v^j}{\sqrt{g_{kl}\,\mathrm{d}u^k\mathrm{d}u^l}\sqrt{g_{mn}\,\mathrm{d}v^m\mathrm{d}v^n}}\,. \tag{2.4}$$

Přitom (du^1, du^2) a (dv^1, dv^2) jsou kontravariantní souřadnice tečných vektorů daných křivek.

Pro úhel parametrických křivek platí

$$\cos\alpha = \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}\,g_{22}}} \tag{2.5}$$

a nutnou a postačující podmínkou pro ortogonalitu parametrické sítě je, aby ve všech bodech plochy platilo

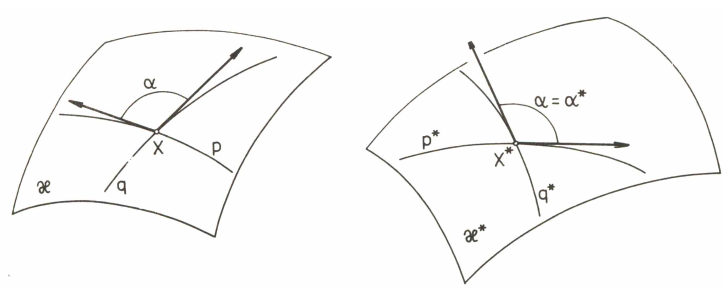
$$g_{12} = 0. \tag{2.6}$$

Důkaz. Vztah (2.4) plyne ze známého vztahu

$$\cos\alpha = \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|} \tag{2.7}$$

a ze zavedení metrického tenzoru. Rovnice (2.5) plyne z parametrických křivek $(\mathrm{d}u^1, \mathrm{d}u^2) = (1, 0)$ a $(\mathrm{d}v^1, \mathrm{d}v^2) = (0, 1)$. Podmínka (2.6) je již snadným důsledkem (2.7). □

Definice 15. Regulární zobrazení dvou ploch, které zachovává úhly křivek, nazýváme *konformní zobrazení.*



Obrázek 2.4: Konformní zobrazení plochy na plochu

Věta 14. Regulární zobrazení dvou ploch je konformní, právě když při použití shodných křivočarých souřadnic platí

$$g_{ij} = \lambda\,\widehat{g}_{ij},\ i = 1, 2,\ j = 1, 2,\ \lambda \neq 0\,,$$

tj. metrické tenzory mají úměrné kovariantní souřadnice.

Důkaz. (a) Nechť $g_{ij} = \lambda\,\widehat{g}_{ij}$, $\lambda \neq 0$, pak ze vztahu (2.4) plyne snadno dokazované tvrzení.

(b) Nechť je zobrazení konformní. Uvažujme dvě dvojice kolmých vektorů $(a^1, a^2), (b^1, b^2)$ a (c^1, c^2), (d^1, d^2), tj. platí

$$g_{ij}\, a^i b^j = 0 \quad , \quad g_{ij}\, c^i d^j = 0\,, \tag{2.8}$$

pak i (konformnost)

$$\widehat{g}_{ij}\, a^i b^j = 0 \quad , \quad \widehat{g}_{ij}\, c^i d^j = 0\,. \tag{2.9}$$

Soustava dvou rovnic (2.8) je homogenní pro tři neznámé $g_{11}, g_{12}(= g_{21})$ a g_{22}. Podobně v (2.9). Netriviální řešení soustav (homogenních) se stejnou maticí jsou v tomto případě násobkem (3 neznámé, hodnost 2), koeficient označme λ a samozřejmě z netriviálnosti řešení plyne $\lambda \neq 0$. Tím je věta dokázána.

□

Věta 15. Nechť je dána plocha $\boldsymbol{P}(u, v)$ na oblasti Ω. Pak obsah plochy je (pokud existuje) dán vztahem

$$P = \iint\limits_{\Omega} \sqrt{g_{11}\, g_{22} - (g_{12})^2}\, \mathrm{d}u^1 \mathrm{d}u^2.$$

Důkaz. Platí

$$P = \iint\limits_{\Omega} \left| \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial u^1} \times \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial u^2} \right| \mathrm{d}u^1 \mathrm{d}u^2\,.$$

Pro vektory platí

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}) \cdot (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{d}) - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{d}) \cdot (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}).$$

Tedy

$$\left(\frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial u^1} \times \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial u^2} \right) \cdot \left(\frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial u^1} \times \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial u^2} \right) = g_{11}\, g_{22} - (g_{12})^2\,.$$

□

Věta 16. Regulární zobrazení je rovnoploché (plochojevné), tj. zachovává obsah plochy, právě když při vyjádření ve shodných křivočarých souřadnicích se rovnají diskriminanty prvních tenzorů, tj.

$$g_{11}\, g_{22} - (g_{12})^2 = \widehat{g}_{11}\, \widehat{g}_{22} - (\widehat{g}_{12})^2\,.$$

Důkaz. Důkaz podobně jako u věty 14. □

2.9 Druhá základní forma plochy

Zabývejme se křivostmi ploch a křivek na ploše. Označme

$$\boldsymbol{P}_i = \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial u^i}, \quad i = 1, 2$$

$$\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{P}_1 \times \boldsymbol{P}_2}{|\boldsymbol{P}_1 \times \boldsymbol{P}_2|}, \quad \boldsymbol{P}_{ij} = \frac{\partial^2 \boldsymbol{P}}{\partial u^i \partial u^j}, \quad \boldsymbol{n}_i = \frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial u^i}$$

a definujme $h_{ij} = -\boldsymbol{n}_i \boldsymbol{P}_j$.

Věta 17. Čísla (funkce) h_{ij} tvoří symetrický tenzor (tzv. druhý základní tenzor plochy) a platí $h_{ij} = \boldsymbol{n}\boldsymbol{P}_{ij}$.

Důkaz. (a) Snadno se vypočte, že pro h_{ij} platí příslušné transformační vztahy, tj. že jde o tenzor.

(b) Ukážeme, že $h_{ij} = \boldsymbol{n}\boldsymbol{P}_{ij}$. Jistě platí $\boldsymbol{n}\boldsymbol{P}_i = 0$ ($\boldsymbol{n}$ je vektorový součin $\boldsymbol{P}_1 \times \boldsymbol{P}_2$). Derivováním $\boldsymbol{n}_j \boldsymbol{P}_i + \boldsymbol{n}\boldsymbol{P}_{ij} = 0 \Rightarrow h_{ij} = \boldsymbol{n}\boldsymbol{P}_{ij}$.

(c) Symetrie tenzoru h_{ij} plyne ze zaměnitelnosti derivování $h_{ij} = \boldsymbol{n}\boldsymbol{P}_{ij} = \boldsymbol{n}\boldsymbol{P}_{ji} = h_{ji}$.

□

2.10 Normálová křivost a Meusnierova věta

Studujme křivost křivky na ploše

$$\boldsymbol{P}(s) = \boldsymbol{P}\big(u^1(s), u^2(s)\big).$$

Křivka je parametrizována obloukem. První křivost $\ddot{\boldsymbol{P}} = {}^1k \cdot \boldsymbol{\nu}$ ($\boldsymbol{\nu}$ je jednotkový vektor hlavní normály).
Označíme $\gamma = \sphericalangle \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\nu}$, tj. odchyliku normály plochy a hlavní normály křivky.

Definice 16. *Normálovou křivostí* křivky k v daném bodě rozumíme číslo

$${}^n k = \ddot{\boldsymbol{P}} \cdot \boldsymbol{n}.$$

Poznámka 6. Platí také ${}^n k = {}^1 k \cdot \cos\gamma$ (viz geometrický význam skalárního součinu).

Věta 18. Normálová křivost všech křivek plochy se společnou tečnou v daném bodě je stejná.

Důkaz. Vyjdeme ze vztahu $\boldsymbol{P}(s) = \boldsymbol{P}\big(u^1(s), u^2(s)\big)$. Platí

$$\dot{\boldsymbol{P}}(s_0) = \boldsymbol{P}_i\big(u^1(s_0), u^2(s_0)\big) \cdot \dot{u}^i(s_0)$$

$$\ddot{\boldsymbol{P}}(s_0) = \boldsymbol{P}_{ij}\big(u^1(s_0), u^2(s_0)\big) \cdot \dot{u}^i(s_0) \cdot \dot{u}^j(s_0) + \boldsymbol{P}_i\big(u^1(s_0), u^2(s_0)\big) \cdot \ddot{u}^i(s_0)$$

Vypočteme ${}^n k$ násobením (skalárním) vektorem $\boldsymbol{n}$

$${}^n k = \ddot{\boldsymbol{P}} \cdot \boldsymbol{n} = \boldsymbol{P}_{ij} \cdot \boldsymbol{n} \cdot \dot{u}^i(s_0) \cdot \dot{u}^j(s_0) + \boldsymbol{P}_i \cdot \boldsymbol{n} \cdot \ddot{u}^i(s_0) = h_{ij} \cdot \dot{u}^i(s_0) \cdot \dot{u}^j(s_0)$$

Tedy ${}^n k$ je dáno tečným vektorem a druhým tenzorem plochy, tj. normálová křivost je stejná pro všechny křivky plochy s daným tečným vektorem. □

Věta 19. (Meusnierova) Středy křivosti (středy oskulačních kružnic) křivek plochy, které se dotýkají jedné tečny plochy, leží na kružnici.

Důkaz. Platí ${}^n k = {}^1 k \cdot \cos\gamma$. Pro normálový řez s danou tečnou ${}^n k = {}^1 k$. Označme ${}^n\overline{\rho} = \frac{1}{{}^n k}$ a ${}^n\rho = \frac{1}{{}^1 k}$. Pak ale ${}^n\rho = {}^n\overline{\rho} \cdot \cos\gamma$ a podle Thaletovy věty střed křivosti leží na kružnici nad průměrem $X\overline{S}$, kde $|X\overline{S}| = {}^n\overline{\rho}$. □

Věta 20. Pro normálovou křivost platí

$${}^n k = \frac{h_{ij} \cdot du^i \cdot du^j}{g_{ij} \cdot du^i \cdot du^j}$$

Důkaz. Derivaci podle oblouku $\dot{u}^i$ nahradíme derivací podle obecného parametru:

$$du^i = \lambda \cdot \dot{u}^i, \quad \lambda \neq 0.$$

Pro λ platí $\lambda = |(du^1, du^2)|$, ale pro velikost vektoru na ploše (např. věta 14) platí $\lambda = \sqrt{g_{ij} \cdot du^i \cdot du^i}$. Tedy

$$\dot{u}^i = \frac{du^i}{\sqrt{g_{ij} \cdot du^i \cdot du^j}}$$

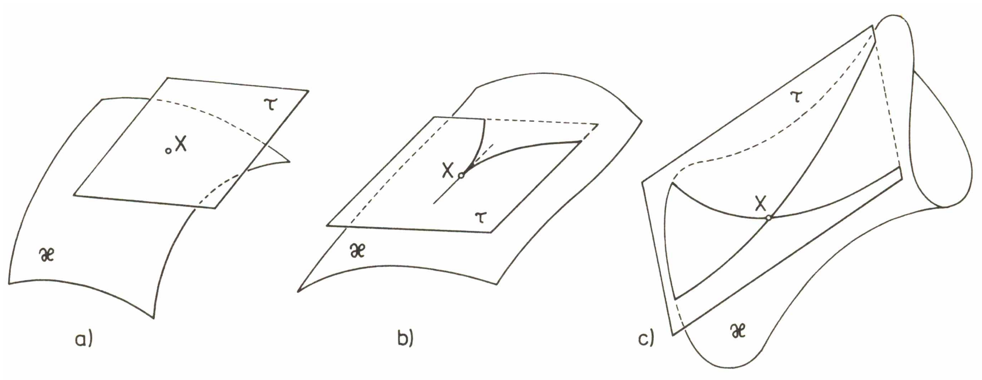
a

$${}^n k = h_{ij} \cdot \dot{u}^i \cdot \dot{u}^j = \frac{h_{ij} \cdot du^i \cdot du^j}{g_{ij} \cdot du^i \cdot du^j}.$$

□

2.11 Dupinova indikatrix a významné směry na ploše

Definice 17. Směr, pro nějž je normálová křivost nulová, nazýváme *asymptotický*.



Obrázek 2.5: a) Eliptický, b) parabolický, c) hyperbolický bod X dané plochy

Bod, v němž každý směr je asymptotický, nazýváme *planární bod.*

Kruhovým bodem rozumíme bod, v němž normálová křivost je konstantní (ve všech směrech stejná) a nenulová.

Uvažujme jednotkový vektor v tečné rovině $\boldsymbol{a} = (du^1, du^2)$ a označme $\dfrac{1}{R} = h_{ij} \cdot du^i \cdot du^j$, $|R|$ je poloměr oskulační kružnice normálového řezu.

Vytvořme křivku

$$\boldsymbol{P}(t) = \boldsymbol{X} + \boldsymbol{a}(t) \cdot \sqrt{|R|}.$$

Tato křivka se nazývá *Dupinova indikatrix.*

Věta 21. Dupinova indikatrix v bodě, který není planární, je středovou kuželosečkou nebo dvojicí středových kuželoseček.

Důkaz. $\dfrac{1}{R} = h_{ij} \cdot du^i \cdot du^j$; (du^i, du^j) určuje jednotkový vektor. Označme $(\alpha^1, \alpha^2) = \sqrt{|R|} \cdot (du^1, du^2)$, pak

$$\frac{1}{R} = h_{ij} \cdot \frac{\alpha^i}{\sqrt{|R|}} \cdot \frac{\alpha^j}{\sqrt{|R|}} \; ,$$

tj. $h_{ij} \cdot \alpha^i \cdot \alpha^j = \pm 1$.

$h_{ij} {\cdot} \alpha^i {\cdot} \alpha^j$ obsahuje jen kvadratické členy, jde tedy o středovou kuželosečku. Dvě různá znaménka umožňují existenci dvou hyperbol. (Pro elipsu je jedna z nich imaginární.) □

Stanovme $h = h_{11} \cdot h_{22} - (h_{12})^2$, diskriminant druhé formy plochy. Pomocí znaménka h můžeme rozhodnout o počtu asymptotických směrů plochy.

Definice 18. Řekněme, že bod plochy je:

1. eliptický, je-li $h > 0$,
2. parabolický, je-li $h = 0$,
3. hyperbolický, je-li $h < 0$.

Věta 22. Dupinova indikatrix v eliptickém (hyperbolickém, parabolickém) bodě je elipsa (dvojice hyperbol se společnými asymptotami, dvojice rovnoběžných přímek). V hyperbolickém (parabolickém, eliptickém) bodě existují dva (jeden, žádný) asymptotický směr.

Důkaz. Vyjdeme ze vztahu $h_{ij} \cdot \alpha^i \cdot \alpha^j = \pm 1$ a pro asymptotické směry platí $h_{ij} \cdot \alpha^i \cdot \alpha^j = 0$ a lze zavést $\lambda = \frac{\alpha^1}{\alpha^2}$ nebo $\lambda = \frac{\alpha^2}{\alpha^1}$ (jedno z čísel musí být nenulové). Pak o existenci asymptotického směru rozhoduje diskriminant kvadratické rovnice $h_{11}(\lambda)^2 + 2h_{12}(\lambda) + h_{22} = 0$, tj. $(h_{12})^2 - h_{11} \cdot h_{22} = -h$. Další část je snadným důsledkem klasifikace kuželoseček. $\square$

Definice 19. Směr plochy je hlavní, je-li normálová křivost v něm extrémální (maximální, resp. minimální).

Věta 23. Nenulový vektor (du^1, du^2) plochy určuje hlavní směr, právě když

$$\begin{vmatrix} (du^2)^2 & -du^1 du^2 & (du^1)^2 \\ g_{11} & g_{12} & g_{22} \\ h_{11} & h_{12} & h_{22} \end{vmatrix} = 0.$$

Důkaz. Z vlastností Dupinovy indikatrix plyne, že $g_{ij} \cdot du^i \cdot dv^j = 0$ pro (du^1, du^2) a (dv^1, dv^2) ležící v hlavních směrech.

Hlavní osy kuželosečky jsou totiž hlavními směry. Z teorie kuželoseček plyne i konjugovanost hlavních směrů, tj. $h_{ij} \cdot du^i \cdot dv^j = 0$. Jde o sdružené průměry.

Máme tedy soustavu

$$g_{ij} \cdot du^i \cdot dv^j = 0$$
$$h_{ij} \cdot du^i \cdot dv^j = 0,$$

tj.

$$\begin{aligned} (g_{11} \cdot du^1 + g_{21} \cdot du^2) \cdot dv^1 + (g_{12} \cdot du^1 + g_{22} \cdot du^2) \cdot dv^2 &= 0 \\ (h_{11} \cdot du^1 + h_{21} \cdot du^2) \cdot dv^1 + (h_{12} \cdot du^1 + h_{22} \cdot du^2) \cdot dv^2 &= 0. \end{aligned}$$

Pro existenci $(dv^1, dv^2) \neq \mathbf{0}$ je nutné a stačí, aby

$$\begin{vmatrix} g_{11}du^1 + g_{21}du^2 & g_{12}du^1 + g_{22}du^2 \\ h_{11}du^1 + h_{21}du^2 & h_{12}du^1 + h_{22}du^2 \end{vmatrix} = 0,$$

tj. použitím věty o součtu a násobku pro determinanty

$$(du^1)^2 \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ h_{11} & h_{12} \end{vmatrix} + \quad (du^2)^2 \begin{vmatrix} g_{21} & g_{22} \\ h_{21} & h_{22} \end{vmatrix} +$$

$$+ du^1 \cdot du^2 \begin{vmatrix} g_{11} & g_{22} \\ h_{11} & h_{22} \end{vmatrix} + du^1 \cdot du^2 \begin{vmatrix} g_{21} & g_{12} \\ h_{21} & h_{12} \end{vmatrix} = 0,$$

kde

$$\begin{vmatrix} g_{21} & g_{12} \\ h_{21} & h_{12} \end{vmatrix} = 0,$$

pak již plyne tvrzení (rozvoj determinantu). □

2.12 Gaussova a střední křivost

Definice 20. *Hlavními křivostmi* plochy v neplanárním bodě rozumíme normálové křivosti v hlavních směrech. Označme je ${}^n k_{min}$, ${}^n k_{max}$.

Gaussovou křivostí plochy v daném neplanárním bodě rozumíme číslo

$$K = {}^n k_{min} \cdot {}^n k_{max}.$$

Střední křivost plochy v neplanárním bodě je dána vztahem

$$H = \frac{{}^n k_{min} + {}^n k_{max}}{2} .$$

Odvodíme vzorce pro výpočet Gaussovy a střední křivosti. Pro (du^1, du^2) máme normálovou křivost ${}^n k$ a platí

$${}^n k_{min} \leq {}^n k \leq {}^n k_{max}.$$

Dále

$${}^n k = \frac{h_{ij} \cdot du^i \cdot du^j}{g_{ij} \cdot du^i \cdot du^j} = \frac{\kappa}{\gamma} .$$

Určení hlavních křivostí lze chápat jako hledání extrémů funkce $\kappa - {}^n k \gamma$. Pro ${}^n k = {}^n k_{max}$ je $\kappa - {}^n k_{max} \gamma \leq 0$ (a právě pro hlavní směr nastane rovnost), podobně pro $k = {}^n k_{min}$ je $\kappa - {}^n k_{min} \gamma \geq 0$ a pro hlavní směr nastane rovnost.

Hledáme tedy (du^1, du^2) tak, aby $(\kappa - {}^n k_{ex}\gamma)$ bylo extrémní. Parciálním derivováním podle du^1 a du^2 dostaneme:

$$\frac{\partial}{\partial du^1} \cdot (\kappa - {}^n k_{ex}\gamma) = 0 \quad \text{a} \quad \frac{\partial}{\partial du^2} \cdot (\kappa - {}^n k_{ex}\gamma) = 0,$$

tj.

$$2h_{11}du^1 + 2h_{12}du^2 - {}^n k_{ex}(2g_{11}du^1 + 2g_{12}du^2) = 0$$
$$2h_{12}du^1 + 2h_{22}du^2 - {}^n k_{ex}(2g_{12}du^1 + 2g_{22}du^2) = 0$$

tj. pro neznámé du^1, du^2, které tvoří nenulový vektor, musí být

$$\begin{vmatrix} h_{11} - {}^n k_{ex}g_{11} & h_{12} - {}^n k_{ex}g_{12} \\ h_{12} - {}^n k_{ex}g_{12} & h_{22} - {}^n k_{ex}g_{22} \end{vmatrix} = 0.$$

To je kvadratická rovnice pro ${}^n k_{ex}$:

$$\big(g_{11}\cdot g_{22} - (g_{12})^2\big){}^n k_{ex}^2 - (g_{11}\cdot h_{22} - 2g_{12}\cdot h_{12} + g_{22}\cdot h_{11}){}^n k_{ex} + \big(h_{11}\cdot h_{22} - (h_{12})^2\big) = 0.$$

Absolutní člen rovnice (v normalizovaném tvaru) je součinem kořenů

$${}^n k_{min} \cdot {}^n k_{max} = \frac{h_{11}\cdot h_{22} - (h_{12})^2}{g_{11}\cdot g_{22} - (g_{12})^2} = \frac{h}{g}.$$

Věta 24. Pro Gaussovu křivost platí

$$K = \frac{h}{g},$$

kde h a g jsou diskriminanty druhé a první základní formy plochy.
Pro střední křivost

$$H = \frac{1}{2} \cdot \frac{g_{11}\cdot h_{22} - 2g_{12}\cdot h_{12} + g_{22}\cdot h_{11}}{g}.$$

Důkaz. Zdůvodnění pro Gaussovu křivost je uvedeno před větou. Tvrzení o střední křivosti plyne z vlastnosti lineárního členu kvadratické rovnice v normovaném tvaru (koeficient se rovná opačné hodnotě k součtu kořenů). □

Věta 25. (Eulerova) Pro normálovou křivost ${}^n k$ platí

$${}^n k = {}^n k_{max} \cdot \cos^2\varphi + {}^n k_{min} \cdot \sin^2\varphi,$$

kde φ je odchylka směru od hlavního směru s maximální normálovou křivostí.

Důkaz. Uvažujme (α^1, α^2) a (β^1, β^2) kontravariantní souřadnice jednotkových vektorů hlavních směrů. Hlavní směry jsou ortogonální, což plyne např. z existence Dupinovy indikatrix.

Označme (γ^1, γ^2) směr na ploše, jistě lze psát

$$\gamma^i = \alpha^i \cdot \cos\varphi + \beta^i \cdot \sin\varphi$$

Normálová křivost pro směr (γ^1, γ^2)

$$
\begin{aligned}
{}^n k = h_{ij} \cdot \gamma^i \cdot \gamma^j &= h_{ij} \cdot (\alpha^i \cos\varphi + \beta^i \sin\varphi) \cdot (\alpha^j \cos\varphi + \beta^j \sin\varphi) = \\
&= h_{11} \cdot \left[(\alpha^1)^2 \cos^2\varphi + (\beta^1)^2 \sin^2\varphi + 2\alpha^1\beta^1 \sin\varphi \cdot \cos\varphi\right] + \\
&+ 2h_{12} \cdot \left[\alpha^1\alpha^2 \cos^2\varphi + \beta^1\beta^2 \sin^2\varphi + \beta^1\alpha^2 \sin\varphi \cdot \cos\varphi + \alpha^1\beta^2 \sin\varphi \cdot \cos\varphi\right] + \\
&+ h_{22} \cdot \left[(\alpha^2)^2 \cos^2\varphi + (\beta^2)^2 \sin^2\varphi + 2\alpha^2\beta^2 \sin\varphi \cdot \cos\varphi\right] = \\
&= {}^n k_{max} \cdot \cos^2\varphi + {}^n k_{min} \cdot \sin^2\varphi + 2\sin\varphi \cdot \cos\varphi \cdot \underbrace{h_{ij}\alpha^i\beta^j}_{=0} = \\
&= {}^n k_{max} \cdot \cos^2\varphi + {}^n k_{min} \cdot \sin^2\varphi.
\end{aligned}
$$

Dané směry jsou sdružené, tj. $h_{ij}\alpha^i\beta^j = 0$. Tím je věta dokázána. □

Bez důkazu uvedeme větu, kterou v roce 1827 objevil Gauss a považoval ji za „slavný“ objev (egregium = slavný).

Věta 26. (Theorema Egregium) Gaussovu křivost lze vyjádřit pouze pomocí koeficientů g_{ij} a jejich prvních a druhých derivací.

Důsledek 1. (Theoremy Egregium)

(i) Plochy, které lze na sebe rozvinout (délkojevně zobrazit), mají v odpovídajících bodech stejnou Gaussovu křivost.

(ii) Rozvinutelné plochy mají nulovou Gaussovu křivost.

(iii) Gaussova křivost je kladná v eliptických, nulová v parabolických a záporná v hyperbolických bodech.

Důkaz. (i) Plyne snadno z věty 26. Rovina má samozřejmě Gaussovu křivost $K = 0$.

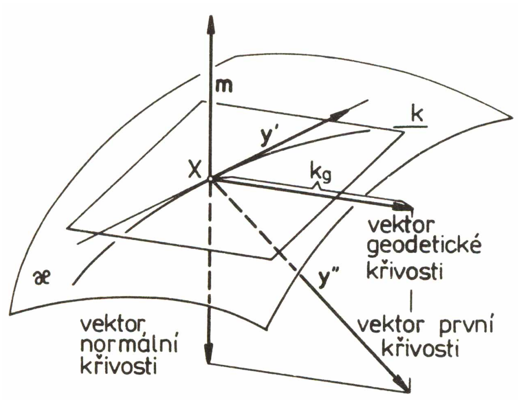
(ii) Stejně jako (i).

(iii) Plyne z věty 24, znaménko K je dáno znaménkem h ($g > 0$, věta 8).

□

2.13 Geodetická křivost plochy

Definice 21. Nechť $\boldsymbol{P}(t), t \in \mathcal{I}$, je křivka na ploše κ. Velikost průmětu vektoru první křivosti $\ddot{\boldsymbol{P}}$ křivky do tečné roviny plochy nazýváme geodetická křivost křivky na ploše.



Obrázek 2.6: Geometrický význam geodetické křivosti křivky na ploše

Věta 27. Pro geodetickou křivost křivky na ploše platí

$$^{g}k = |(\boldsymbol{n}, \dot{\boldsymbol{P}}, \ddot{\boldsymbol{P}})| = |\boldsymbol{n} \cdot (\dot{\boldsymbol{P}} \times \ddot{\boldsymbol{P}})|,$$

kde $\boldsymbol{n}$ je jednotkový normálový vektor plochy, $\dot{\boldsymbol{P}}$ jednotkový tečný vektor křivky a $\ddot{\boldsymbol{P}}$ vektor první křivosti křivky.

Důkaz. Označme $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{n} \times \dot{\boldsymbol{P}}$. Vektor $\boldsymbol{c}$, $|\boldsymbol{c}| = 1$, patří do zaměření tečné roviny. Zřejmě $^{g}k = |\boldsymbol{c} \cdot \ddot{\boldsymbol{P}}|$. Tedy (záměnou pořadí vektorů se ve smíšeném součinu mění případně jen znaménko)

$$^{g}k = |(\boldsymbol{n} \times \dot{\boldsymbol{P}}) \cdot \ddot{\boldsymbol{P}}| = |(\boldsymbol{n}, \dot{\boldsymbol{P}}, \ddot{\boldsymbol{P}})|.$$

□

2.14 Weingartenovy a Gaussovy rovnice

Věta 28. (Weingartenova) Pro vektory $\boldsymbol{P}_i = \dfrac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial u^i}$ a $\boldsymbol{n}_i = \dfrac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial u^i}$, $i = 1, 2$, platí

$$\boldsymbol{n}_i = -h_i^j \cdot \boldsymbol{P}_j$$

Důkaz. Vyjdeme ze vztahu $\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{n} = 1$, tj. $\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{n}_i = 0$. Tedy $\boldsymbol{n}_i$ leží v tečné rovině, tj. $\boldsymbol{n}_i = k_i^j \cdot \boldsymbol{P}_j$, kde k_i^j jsou kombinační koeficienty, které vypočteme. Vynásobíme rovnici $\boldsymbol{P}_k$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{P}_k \cdot \boldsymbol{n}_i &= k_i^j \cdot \boldsymbol{P}_j \cdot \boldsymbol{P}_k \\ -h_{ik} &= k_i^j \cdot g_{jk} \end{aligned}$$

neboli $k_i^j = -h_i^j$ (jde o operaci snížení indexu). □

Věta 29. (Gaussova) Pro vektory $\boldsymbol{P}_{ij}$ platí

$$\boldsymbol{P}_{ij} = \Gamma_{ij}^k \cdot \boldsymbol{P}_k + h_{ij} \cdot \boldsymbol{n},$$

kde Γ_{ij}^k jsou tzv. Christoffelovy symboly, pro než

$$\Gamma_{ij}^k = \boldsymbol{P}_{ij} \cdot \boldsymbol{P}_l \cdot g^{lk}$$

Důkaz. $\boldsymbol{P}_{ij}$ vyjádříme v bázi $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \boldsymbol{n}$

$$\boldsymbol{P}_{ij} = \lambda_{ij}^k \cdot \boldsymbol{P}_k + b_{ij} \cdot \boldsymbol{n} \tag{2.10}$$

a stanovíme koeficienty λ_{ij}^k a b_{ij}.

Vyjdeme z platnosti těchto vztahů:

$$\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{n} = 1,\ \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{P}_i = 0,\ \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{P}_{ij} = h_{ij}.$$

Po skalárním vynásobení (2.10) vektorem $\boldsymbol{n}$ dostaneme

$$\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{P}_{ij} = h_{ij} = b_{ij}.$$

Po skalárním vynásobení (2.10) vektorem $\boldsymbol{P}_r$ dostaneme

$$\boldsymbol{P}_r \cdot \boldsymbol{P}_{ij} = \lambda_{ij}^k \cdot \boldsymbol{P}_k \cdot \boldsymbol{P}_r = \lambda_{ij}^k \cdot g_{kr}.$$

□

Poznámka 7. Weingartenovy a Gaussovy vzorce tvoří pro plochu analogii k Frenetovým vzorcům pro křivku. Popisují změnu lokálního repéru plochy, který je tvořen tečnými vektory parametrických křivek a vektorem normály plochy. Celkem jde o šest rovnic, ale dvě z nich vzhledem k zaměnitelnosti pořadí derivování splývají.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{n}_1 &= -h_1^j \cdot \boldsymbol{P}_j \\ \boldsymbol{n}_2 &= -h_2^j \cdot \boldsymbol{P}_j \\ \boldsymbol{P}_{11} &= \Gamma_{11}^k \cdot \boldsymbol{P}_k + h_{11} \cdot \boldsymbol{n} \\ \boldsymbol{P}_{12} &= \Gamma_{12}^k \cdot \boldsymbol{P}_k + h_{12} \cdot \boldsymbol{n} \\ \boldsymbol{P}_{22} &= \Gamma_{22}^k \cdot \boldsymbol{P}_k + h_{22} \cdot \boldsymbol{n} \end{aligned}$$

Poznámka 8. Christoffelovy symboly netvoří tenzor, neboť jejich transformace při změně souřadnic je obecnější než u tenzoru. Christoffelovy symboly jsou příkladem tzv. konexe.

2.15 Asymptotické, hlavní a geodetické křivky

Definice 22. Křivka plochy je *asymptotická*, je-li její normálová křivost v každém bodě nulová.

Věta 30. Tečna asymptotické křivky je určena asymptotickým směrem. Hlavní normála asymptotické křivky leží v tečné rovině plochy (binormála je normálou plochy). Asymptotická křivka je určena diferenciální rovnicí

$$h_{ij} \cdot du^i \cdot du^j = 0.$$

Důkaz. Plyne z vlastností normálové křivosti. □

Poznámka 9. Pro parametrické křivky, které jsou asymptotické, platí

$$h_{11} = h_{22} = 0.$$

Definice 23. Křivka plochy je *hlavní křivkou*, je-li její tečna v každém bodě určena hlavním směrem.

Poznámka 10. Hlavní křivky jsou nazývány také „křivoznačné“.

Věta 31. Hlavní křivky na ploše bez planárních a kruhových bodů jsou popsány diferenciální rovnicí

$$\begin{vmatrix} (du^2)^2 & -du^1du^2 & (du^1)^2 \\ g_{11} & g_{12} & g_{22} \\ h_{11} & h_{12} & h_{22} \end{vmatrix} = 0.$$

Hlavní křivky (na takové ploše) tvoří ortogonální síť.
Parametrické křivky jsou hlavními křivkami, právě když $g_{12} = h_{12} = 0$.

Důkaz. plyne z vlastností hlavních směrů. □

Věta 32. (Rodriguesova) Křivka $\boldsymbol{P}(t) = \boldsymbol{P}\big(u^1(t), u^2(t)\big)$ plochy je hlavní křivkou plochy, právě když v každém bodě jsou vektory $\boldsymbol{n'}$ a $\boldsymbol{P'}$ lineárně závislé. Koeficient kolineárnosti je roven příslušné hlavní křivosti ${}^{n}k_{ex}$, tj. $\boldsymbol{n'} = {}^{n}k_{ex} \cdot \boldsymbol{P'}$.

Důkaz. $\Rightarrow$ $\boldsymbol{n}$ je jednotkový vektor normály plochy a $\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{n'} = 0$, tj. $\boldsymbol{n'}$ leží v zaměření tečné roviny, tedy

$$\boldsymbol{n'} = \alpha \cdot \boldsymbol{P'} + \beta \cdot {}^{\perp}\boldsymbol{P'}, \qquad (|{}^{\perp}\boldsymbol{P'}| = 1,\ \boldsymbol{P}' \cdot {}^{\perp}\boldsymbol{P'} = 0), \tag{2.11}$$

kde ${}^{\perp}\boldsymbol{P'}$ je kolmý vektor na $\boldsymbol{P'}$ a leží v tečné rovině. Rovnici (2.11) vynásobíme ${}^{\perp}\boldsymbol{P'}$:

$$\boldsymbol{n'} \cdot {}^{\perp}\boldsymbol{P'} = \beta,$$

ale $\quad \boldsymbol{n'} = \boldsymbol{n}_j \cdot (u^j)' \quad$ a $\quad {}^{\perp}\boldsymbol{P'} = \boldsymbol{P}_i \cdot b^i, \quad$ tedy

$$\beta = [\boldsymbol{n}_j \cdot (u^j)'] \cdot [\boldsymbol{P}_i \cdot b^i] = -h_{ij} \cdot (u^j)' \cdot b^i.$$

Jde o hlavní křivku, derivace normálové křivosti musí být nulová, tj. $\beta = 0$. Snadno spočteme

$$\boldsymbol{n'} = \alpha \cdot \boldsymbol{P'}, \quad \text{tedy} \quad \boldsymbol{n'} \cdot \boldsymbol{P'} = \alpha \cdot \boldsymbol{P'} \cdot \boldsymbol{P'},$$

$$\text{tj.} \qquad \alpha = \frac{\boldsymbol{n'} \cdot \boldsymbol{P'}}{\boldsymbol{P'} \cdot \boldsymbol{P'}} = -\frac{h_{ij} \cdot (u^i)' \cdot (u^j)'}{g_{ij} \cdot (u^i)' \cdot (u^j)'} = -\, {}^{n}k_{ex}.$$

$\Leftarrow$ Předpokládáme $\boldsymbol{n'} = \alpha \cdot \boldsymbol{P'}$ a ukážeme, že vektor $\boldsymbol{P'}$ a ${}^{\perp}\boldsymbol{P'}$ jsou konjungované k 2. základní formě. To plyne ze vztahu $\boldsymbol{n'} \cdot {}^{\perp}\boldsymbol{P'} = 0$, čili

$$\big(\boldsymbol{n'}_j \cdot (u^j)'\big) \cdot \big(\boldsymbol{P}_i \cdot b^i\big) = -h_{ij} \cdot (u^j)' \cdot c^i = 0.$$

□

Definice 24. Křivku plochy, která obsahuje jen body s nulovou geodetickou křivostí, nazýváme *geodetickou křivkou* (neboli geodetikou).

Věta 33. Pro geodetickou křivost platí

$${}^{g}k = |\boldsymbol{m}|, \qquad \text{kde} \ \ \boldsymbol{m} = \Big(\frac{d^2u^k}{ds^2} + \Gamma^k_{ij} \cdot \frac{du^i}{ds} \cdot \frac{du^j}{ds}\Big) \cdot \boldsymbol{P}_k$$

Důkaz.

$$\dot{\boldsymbol{P}} = \boldsymbol{P}_i \cdot \frac{du^i}{ds} \quad ; \quad \ddot{\boldsymbol{P}} = \boldsymbol{P}_{ij} \cdot \frac{du^i}{ds} \cdot \frac{du^j}{ds} + \boldsymbol{P}_i \cdot \frac{d^2u^i}{ds^2}.$$

Pomocí Gaussovy věty (29)

$$\ddot{\boldsymbol{P}} = \big(\Gamma^k_{ij} \cdot \boldsymbol{P}_k + h_{ij} \cdot \boldsymbol{n}\big) \cdot \frac{du^i}{ds} \cdot \frac{du^j}{ds} + \boldsymbol{P}_i \cdot \frac{d^2u^i}{ds^2}.$$

Z toho že ${}^{g}k$ je velikost pravoúhlého průmětu vektoru 1. křivosti do tečné roviny plyne vzorec. □

Poznámka 11. Větu (33) lze chápat i jako soustavu diferenciálních rovnic pro určení geodetik.

Vypočteme Christoffelovy symboly tak, že vystačíme s 1. tenzorem. Tím ukážeme, že geodetická křivost je pojmem vnitřní geometrie plochy.

Platí $g_{ij} = \boldsymbol{P}_i \cdot \boldsymbol{P}_j$, derivujeme

$$\partial_k \, g_{ij} = \boldsymbol{P}_{ik} \cdot \boldsymbol{P}_j + \boldsymbol{P}_i \cdot \boldsymbol{P}_{jk} \tag{2.12}$$

cyklickou záměnou

$$\partial_j \, g_{ki} = \boldsymbol{P}_{kj} \cdot \boldsymbol{P}_i + \boldsymbol{P}_k \cdot \boldsymbol{P}_{ij} \tag{2.13}$$

$$\partial_i \, g_{jk} = \boldsymbol{P}_{ji} \cdot \boldsymbol{P}_k + \boldsymbol{P}_j \cdot \boldsymbol{P}_{ki} \tag{2.14}$$

Vytvoříme (2.12) + (2.13) - (2.14)

$$2 \cdot \boldsymbol{P}_i \cdot \boldsymbol{P}_{jk} = (\partial_k \, g_{ij} + \partial_j \, g_{ki} - \partial_i \, g_{jk}),$$

tedy Γ^k_{ij} lze vyjádřit pomocí derivací g_{ij}.

Věta 34. (O geodetice I.)

(a) Křivka plochy je geodetikou, právě když v každém bodě (s nenulovou první křivostí) splývá hlavní normála křivky s normálou plochy.

(b) Je-li geodetická křivka rovinná (ale není přímkou), pak je hlavní křivkou.

(c) Při rozvinutí dvou ploch na sebe (délkojevné zobrazení) se všechny geodetiky jedné plochy zobrazí na geodetiky druhé plochy.

Důkaz. (a) Plyne z definice geodetické křivosti.

(b) Je důsledkem lemmatu

Lemma 1. Křivka plochy je hlavní, právě když plocha tvořená normálami plochy v bodech křivky je rozvinutelná.

(c) Plyne z toho, že lze Γ^k_{ij} vyjádřit pomocí derivací g_{ij}.

□

Věta 35. (O nejkratší spojnici)

(a) Pokud mezi dvěma body plochy existuje nejkratší spojnice, pak je geodetikou.

(b) Každým bodem plochy prochází jediná geodetika s danou tečnou.

Důkaz. Odvození vyžaduje hlubší znalosti z variačního počtu, proto zde důkaz nemůže být podán. □

Věta 36. (O geodetice II.)

(a) Každá přímka (nebo její část) na ploše je geodetikou.

(b) Každý normálový řez plochy je geodetikou.

Poznámka 12. Řez je normálový, je-li rovina řezu v každém bodě řezu kolmá na tečnou rovinu (obsahuje normálu plochy).

Důkaz. Je zřejmý z definice. □

Příklad 4.

(a) Geodetikami v rovině jsou právě její přímky. Splývá množina geodetik a nejkratších spojnic.

(b) Geodetikami na kulové ploše jsou tzv. hlavní kružnice, tj. kružnice, které mají střed ve středu kulové plochy. To plyne např. z věty 36 - b.

(c) Geodetikou (jednou z geodetik) na obecné válcové ploše je normálový řez (viz věta 36 - b).

(d) Geodetikami na rotační válcové ploše jsou: površky, rovnoběžkové kružnice a šroubovice. Zvolíme-li na povrchu dva body, existuje mezi nimi (nejsou-li na téže rovnoběžkové kružnici, tj. normálovém řezu) nekonečně mnoho geodetik. Jen jedna z nich je nejkratší spojnicí.

(e) Uvažujme rotační plochu

$$\boldsymbol{P}(u,v) = \big(\alpha(u)\cdot\cos\ v,\ \alpha(u)\cdot\sin\ v,\ \beta(u)\big)$$

Pak každý meridián je geodetikou (je normálovým řezem).
Rovnoběžková kružnice je geodetikou, právě když pro meridiány $\boldsymbol{M}$ v bodech dané rovnoběžkové kružnice platí

$$\boldsymbol{M}'(u) = \big(\alpha'(u),\ 0,\ \beta'(u)\big) = \big(0,\ 0,\ \beta'(u)\big) \neq \mathbf{0},$$

tj. $\alpha'(u) = 0$. Jde tedy o rovníkové a hrdlové kružnice.
Důkaz plyne z toho, že jde o normálový řez.

Samozřejmě, že na rotační ploše existují i jiné geodetiky (viz šroubovice na rotační válcové ploše).

Věta 37. (Clairautova) Nechť $\boldsymbol{G}(t)$ je geodetikou na rotační ploše s osou o a nechť $\rho(t)$ je vzdálenost bodu křivky $\boldsymbol{G}(t)$ od osy o. Označme $\varphi(t)$ odchylku křivky $\boldsymbol{G}(t)$ od meridiánu $\boldsymbol{M}(k)$ v daném společném bodě, tj.

$$\varphi(t) = \arccos \frac{|\boldsymbol{G'}(t) \cdot \boldsymbol{M'}(k)|}{|\boldsymbol{G'}(t)| \cdot |\boldsymbol{M'}(k)|}.$$

Pak součin $\rho(t) \cdot \sin(\varphi(t))$ je konstatní. Naopak je-li součin $\rho(t) \cdot \sin(\varphi(t))$ konstantní, je křivka $\boldsymbol{G}(t)$ geodetikou.

Důkaz. Standardním výpočtem. Druhá část vyžaduje řešení diferenciální rovnice. □

2.16 Minimální plochy

Pro prostorovou křivku (uzavřenou) hledáme plochu, která ji obsahuje a má minimální povrch. Z fyzikálního hlediska jde o problém „mýdlové bubliny“. Počátky jsou v 18. století u Eulera a Lagrange. Problém bývá nazýván problém Plateau (Plateau byl fyzik, který se věnoval kapilárním jevům a vytváření povrchů na mřížkách).

Definice 25. Řekneme, že *plocha je minimální*, právě když ve všech jejích bodech je nulová střední křivost.

Věta 38. Řešením problému Plateau jsou minimální plochy, tj. pokud pro danou uzavřenou křivku existuje plocha (plát, část plochy) s touto hranicí taková, že ze všech ploch s danou vlastností má minimální povrch, pak jde o plochu minimální, tj. o plochu s nulovou střední křivostí ve všech jejích bodech.

Příklad 5.

(a) Mezi rotačními plochami existuje jediná minimální plocha. Je jí **katenoid**, který vzniká rotací řetězovky.
Řetězovka: $z = \frac{1}{a} \cdot \cosh(ax), \quad a > 0.$
Katenoid: $\boldsymbol{P}(u,v) = \left(\frac{1}{a} \cdot \cosh(au) \cdot \cos\ v,\ \frac{1}{a} \cdot \cosh(au) \cdot \sin\ v,\ u\right).$

(b) Jedinou přímkovou minimální plochou (kromě roviny) je **helikoid**

$$\boldsymbol{P}(u,v) = (u \cdot \cos\ v,\ u \cdot \sin\ v,\ v_0 \cdot v).$$

Helikoid je pravoúhlou uzavřenou šroubovou plochou (povrchové přímky jsou kolmé k ose šroubového pohybu a osu protínají).

(c) Enneperův „deštník“

$$\boldsymbol{P}(u,v) = (u - \frac{1}{3}u^3 + uv^2,\ v - \frac{1}{3}v^3 + vu^2,\ u^2 - v^2)$$

je minimální plochou.

Literatura

[1] Budinský, B. – Kepr, B.: Základy diferenciální geometrie s technickými aplikacemi. SNTL, Praha 1970.

[2] Budinský, B.: Analytická a diferenciální geometrie. SNTL, Praha 1983.

[3] Pradlová, J.: Diferenciální geometrie – sbírka řešených příkladů. ZČU, Plzeň 2001.

[4] Pressley, A.: Elementary differential geometry. Springer, London 2001.

[5] Švec, A.: Úvod do diferencovatelných variet. MFF, Praha 1969.

[6] Vanžurová, A.: Diferenciální geometrie křivek a ploch. Univerzita Palackého, Olomouc 1996.