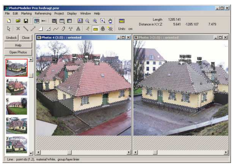
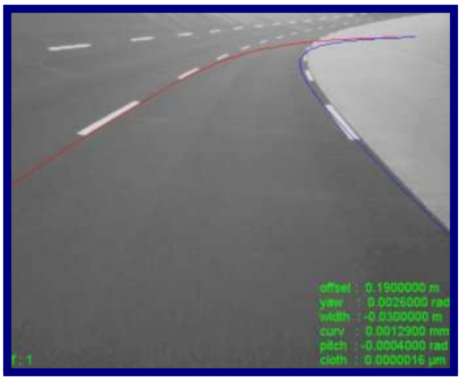
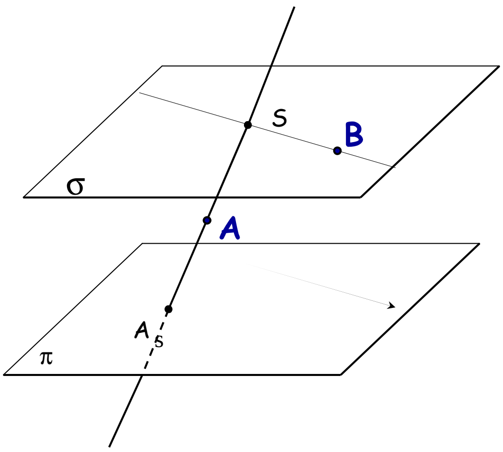
Aplikace

- Výpočet pohybu kamery rekonstrukcí videosekvence
- 3D rekonstrukce objektů
- 3D modelování





Středové promítání



S...střed promítání

ν...průmětna

σ...centrální rovina

σ||π, S∈σ

B∈σ, neexistuje středový průmět

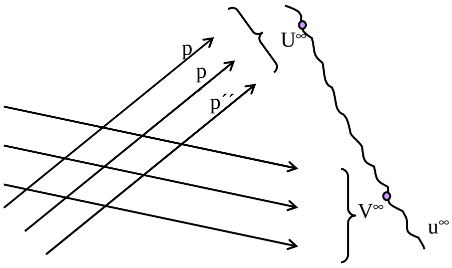
Nevlastní prvky

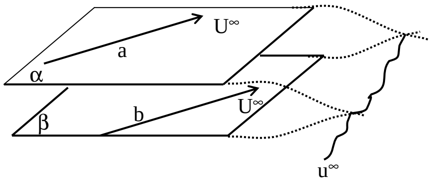
Nevlastní bod (směr) přímky *a* ... bod, společný všem přímkám rovnoběžným s přímkou *a*.

Nevlastní body všech přímek roviny tvoří nevlastní přímku roviny.

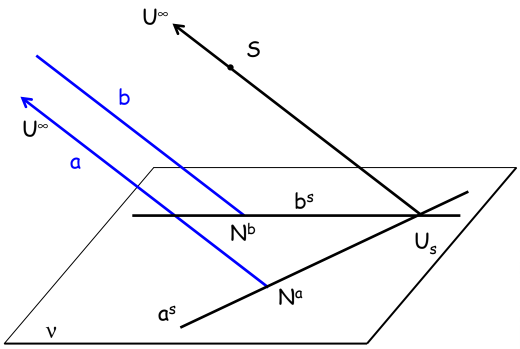
Nevlastní přímka roviny je určena dvěma nevlastními body roviny.

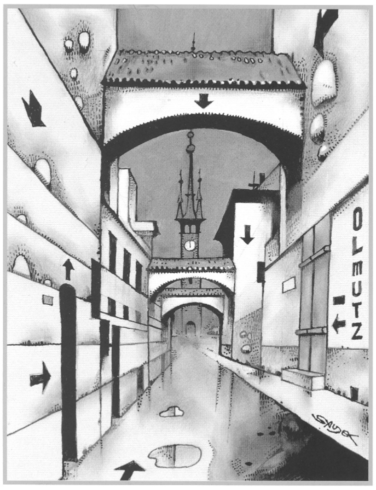
Rovnoběžné roviny mají stejnou nevlastní přímku.





Průmět rovnoběžných přímek



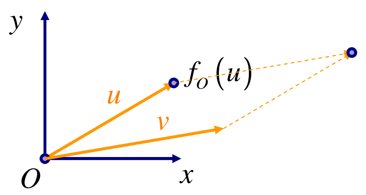


Středovým průmětem rovnoběžných přímek $a \parallel b$, které nejsou průčelné, jsou různoběžky a^s, b^s, jejich průsečík U_s je průmětem společného nevlastního bodu U^∞.

Afinní prostor

- Afinním prostorem budeme rozumět neprázdnou množinu A, na které je zvolen nějaký vektorový prostor V a dáno zobrazení $f : A \times V \to A$, $f(X,u) = X + u$ (sčítání bodu a vektoru)
  splňující :
  1. $(X + u) + v = X + (u + v)$ pro každé $X \in A$ a každé $u, v \in V$
  2. označíme-li symbolem f_O zobrazení $V \to A$, $f_O(u) = (O + u)$

  pro každé $u \in V$, je f_O vzájemně jednoznačným zobrazením.
- Vektorový prostor V nazýváme zaměření afinního prostoru A, někdy ho značíme i V(A). Prvky A nazýváme body afinního prostoru, o vektorech ze zaměření hovoříme volně jako o vektorech z afinního prostoru.



$$f_O(u) + v = O + (u + v)$$

$$A + v = B$$

$$v = B - A$$

Reálný afinní prostor

Body: $X = (1, x, y, z)^T$

Vektory: $u = (0, u_1, u_2, u_3)^T$

- Sčítání vektorů $u + v = (0, u_1, u_2, u_3) + (0, v_1, v_2, v_3) = (0, u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$
- Součet bodu a vektoru $X + v = (1, x, y, z) + (0, v_1, v_2, v_3) = (1, x + v_1, y + v_2, z + v_3)$
- Rovina (A,W^2) $a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 z = 0$

  $(1, x, y, z)(a_0, a_1, a_2, a_3) = 0$

  $X^T a = 0$

  Zaměření roviny $u \in W$ $u^T a = 0$
- Afinní zobrazení $f : A^n \to A^m$

$X \to X'$, $X' = AX + b$ A...matice adjungovaného lineárního zobrazení

$$(1, x_1, x_2, x_3)^T \to (1, x_1', x_2', x_3')^T \qquad (0, u_1, u_2, u_3)^T \to (0, u_1', u_2', u_3')^T$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ u_1' \\ u_2' \\ u_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

Projektivní rozšíření reálné afinní roviny

Homogenní souřadnice bodu

- Nechť (A^2,V^2) je afinní rovina

$$\left.\begin{array}{ll} \text{vektory} \in V^2: & (o,u_1,u_2)^{\mathsf{T}} \sim k(o,u_1,u_2)^{\mathsf{T}}\; k \neq 0 \\ \text{body} \in A^2 & (1,x,y)^{\mathsf{T}} \sim k(x_0,x_1,x_2)^{\mathsf{T}}\; k \neq 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{nevlastní} \\ \text{vlastní} \end{array} \quad \text{body v } P^2$$

- Body – třídy ekvivalence ~ $B = \left\{\left[(x_0,x_1,x_2)^{\mathsf{T}}\right], (x_0,x_1,x_2) \neq o\right\}$
- Přímky

$$P = \left\{\left\{(x_0,x_1,x_2)^{\mathsf{T}}\right\}, a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0\right\}$$

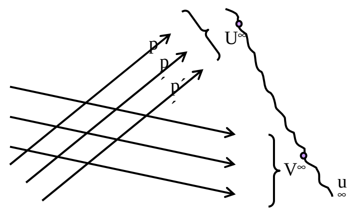
$$X \in a \Leftrightarrow X^T a = a^T X = 0$$

Přímka určená dvěma body *a=(AB)*

$$\left.\begin{array}{l} A \in a \Leftrightarrow A^T a = 0 \\ B \in a \Leftrightarrow B^T a = 0 \end{array}\right\} a = A \times B$$

Průsečík dvou přímek *P=m∩n*

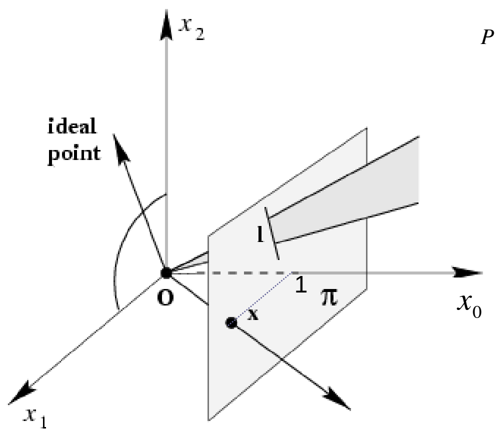
$$\left.\begin{array}{l} P \in m \Leftrightarrow P^T m = 0 \\ P \in n \Leftrightarrow P^T n = 0 \end{array}\right\} P = m \times n$$



Model projektivní roviny

$$B = \left\{\left[(x_0,x_1,x_2)^{\mathsf{T}}\right], (x_0,x_1,x_2) \neq o\right\}$$

$$P = \left\{\left\{(x_0,x_1,x_2)^{\mathsf{T}}\right\}, a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0\right\}$$



Nevlastní body $x_0 = 0$

Vnořená afinní rovina

$$(x_0,x_1,x_2)^{\mathsf{T}} \sim \left(1, \frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}\right)^{\mathsf{T}} = (1,x,y)^{\mathsf{T}}$$

$$x = \frac{x_1}{x_0} \quad y = \frac{x_2}{x_0}$$

Projektivní rozšíření reálného afinního prostoru
Homogenní souřadnice bodu

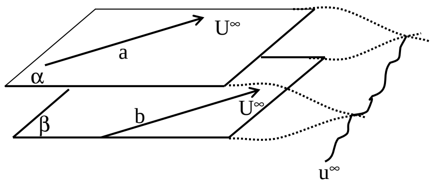
- Nechť (A^3,V^3) je afinní prostor

$$\left.\begin{array}{lll} \text{vektory} \in V^3: & (o,u_1,u_2,u_3)^{\mathrm{T}} \sim k(o,u_1,u_2,u_3)^{\mathrm{T}}\ k \neq 0 & \text{nevlastní} \\ \text{body} \in A^3 & (1,x,y,z)^{\mathrm{T}} \sim k(x_0,x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}\ k \neq 0 & \text{vlastní} \end{array}\right\} \text{body v } P^3$$

- Body – třídy ekvivalence ~ $B = \left\{\left[(x_0,x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}\right], (x_0,x_1,x_2,x_3) \neq o\right\}$
- Roviny

$$R = \left\{\left\{(x_0,x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}\right\}, a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0\right\}$$

$$(x_0,x_1,x_2,x_3)(a_0,a_1,a_2,a_3) = 0$$
$$(0,x_1,x_2,x_3)(a_0,a_1,a_2,a_3) = 0$$
$$X \in a \Leftrightarrow X^T a = a^T X = 0$$



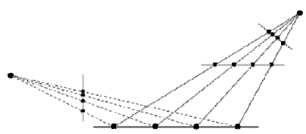
Projektivní zobrazení

Nechť φ je lineární zobrazení operující mezi vektorovými prostory V_{n+1} a V'_{m+1}

$$\varphi: \ V_{n+1} \to V'_{m+1}.$$

Buďte $\mathbb{P}_n = \{\langle \mathbf{x} \rangle : \ \mathbf{x} \in V_{n+1}, \mathbf{x} \neq \mathbf{o}\}$ a $\mathbb{P}'_m = \{\langle \mathbf{x} \rangle : \ \mathbf{x} \in V'_{m+1}, \mathbf{x} \neq \mathbf{o}\}$ dva projektivní prostory. Zobrazení $f : \mathbb{P}_n \to \mathbb{P}'_m$ se nazývá **projektivní** nebo také **kolineární zobrazení**, jestliže pro každý bod $X = \widetilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{P}_n$ a pro každého vektorového zástupce $\mathbf{x} \in V_{n+1}$ bodu X platí

$$f(X) = \langle \varphi(\mathbf{x}) \rangle.$$



Dělící dvojpoměr

Nechť A, B, C, D jsou čtyři navzájem různé body projektivní přímky $\mathbb{P}_1$ a nechť platí

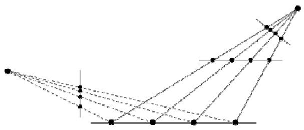
$$\begin{aligned} \mathbf{c} &= \alpha_1 \mathbf{a} + \beta_1 \mathbf{b} \\ \mathbf{d} &= \alpha_2 \mathbf{a} + \beta_2 \mathbf{b}. \end{aligned}$$

Potom číslo

$$\mu = (A, B, C, D) = \frac{\alpha_2 \beta_1}{\alpha_1 \beta_2}$$

nazveme **dvojpoměr** uspořádané(!) čtveřice bodů (A, B, C, D).

- Dělící dvojpoměr je invariantem projektivního zobrazení



Analytické vyjádření projektivního zobrazení

$$f : P^n \rightarrow P^m, f(X) = AX$$

$$\begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & \dots & a_{0n} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m0} & a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Třídou matic *kA, k≠0* je určeno jediné projektivní zobrazení.

Projektivita $P^n \rightarrow P^n$ je jednoznačně určena obrazy *n+2* bodů, z nichž žádných *n+1* bodů neleží v téže nadrovině

matice *A(n+1,n+1)* n^2+2n dof

n+2 bodů *n(n+2)* dof

Vlastnosti matice zobrazení

$$f: P^n \to P^m, f(X) = AX$$

$$\begin{pmatrix} a_{01} \\ a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{a_{00}} & a_{01} & a_{02} & \dots & a_{0n} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m0} & a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

- **Sloupce matice zobrazení jsou obrazy vektorů báze.**
- **Řádky v projekční matici jsou roviny, které se zobrazí do souřadnicových rovin**

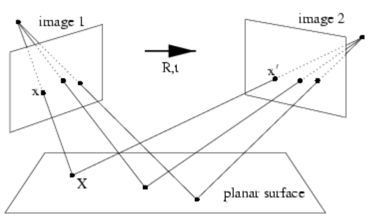
Př: Množina bodů, které se zobrazí na nevlastní nadrovinu

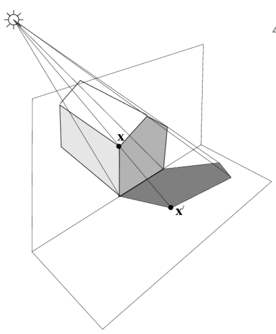
$$x_0' = 0 \Leftrightarrow a_{00}x_0 + a_{01}x_1 + \dots a_{0n}x_n = 0$$

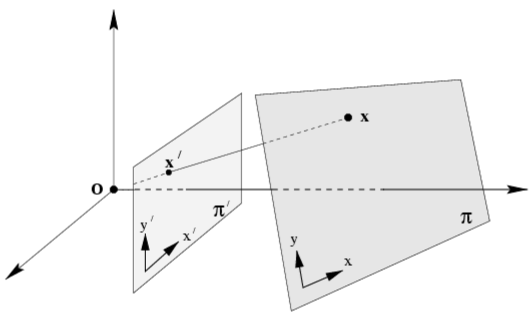
Př: Množina bodů, které se zobrazí na souř. nadrovinu *x_i=0*

$$x_i' = 0 \Leftrightarrow a_{i0}x_0 + a_{i1}x_1 + \dots a_{in}x_n = 0$$

Projektivní zobrazení roviny P2→ P2







Projektivní zobrazení roviny $P^2 \rightarrow P^2$

$$(x_0, x_1, x_2)^T \rightarrow (x'_0, x'_1, x'_2)^T$$

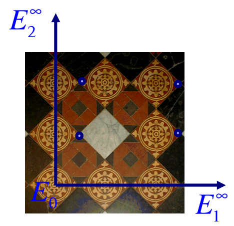
<u>Matice zobrazení je určena až na nenulový násobek</u>

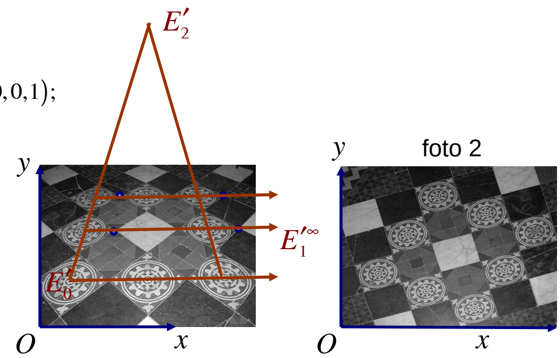
$$\begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} h_{00} & h_{01} & h_{02} \\ h_{10} & h_{11} & h_{12} \\ h_{20} & h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{x}' = \mathbf{H}\,\mathrm{x}$$

8DOF

$$E_0 = (1,0,0);\ E_1 = (0,1,0);\ E_2 = (0,0,1);$$





Projektivní zobrazení roviny $P^2 \rightarrow P^2$

$$(x_0, x_1, x_2)^T \rightarrow (x'_0, x'_1, x'_2)^T$$

<u>Matice zobrazení je určena až na nenulový násobek</u>

$$\mathrm{x}' = \mathbf{H}\,\mathrm{x}$$

$$\begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} h_{00} & h_{01} & h_{02} \\ h_{10} & h_{11} & h_{12} \\ h_{20} & h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

8DOF

Afinní zobrazení projektivního rozšíření afinní roviny

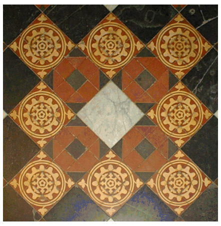
= projektivní zobrazení, které zachovává nevlastní prvky

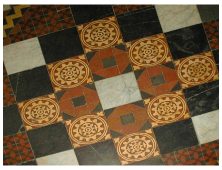
$$\begin{pmatrix} 0 \\ x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} h_{00} & h_{01} & h_{02} \\ h_{10} & h_{11} & h_{12} \\ h_{20} & h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Rightarrow h_{01} = 0, h_{02} = 0$$

6DOF

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b_1 & a_{00} & a_{01} \\ b_2 & a_{10} & a_{11} \end{bmatrix}$$

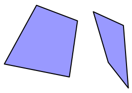
Přehled projektivit v rovině





Projektivity 8dof

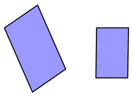
$$\begin{bmatrix} h_{00} & h_{01} & h_{02} \\ h_{10} & h_{11} & h_{12} \\ h_{20} & h_{21} & h_{22} \end{bmatrix}$$



incidence, kolinearita, průsečík tečna, dělící dvojpoměr

Afinity 6dof

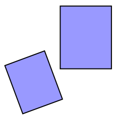
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b_1 & a_{00} & a_{01} \\ b_2 & a_{10} & a_{11} \end{bmatrix}$$



Rovnoběžnost, dělící poměr,
nevlastní přímka l_∞

Podobnosti 4dof

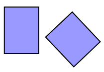
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b_1 & k\cos\alpha & k\sin\alpha \\ b_2 & -k\sin\alpha & k\cos\alpha \end{bmatrix}$$



úhly.
Izotropické body

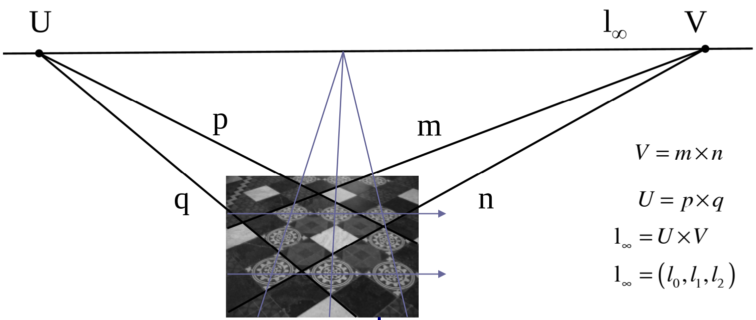
Shodnosti 3dof

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b_1 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ b_2 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

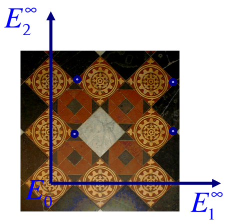


délky, plochy.

Afinní rektifikace

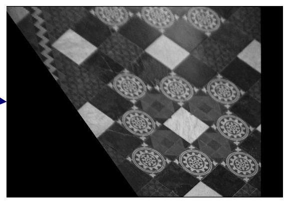


$$V = m \times n$$
$$U = p \times q$$
$$l_\infty = U \times V$$
$$l_\infty = (l_0, l_1, l_2)$$



$$X'' = H'_P X'$$

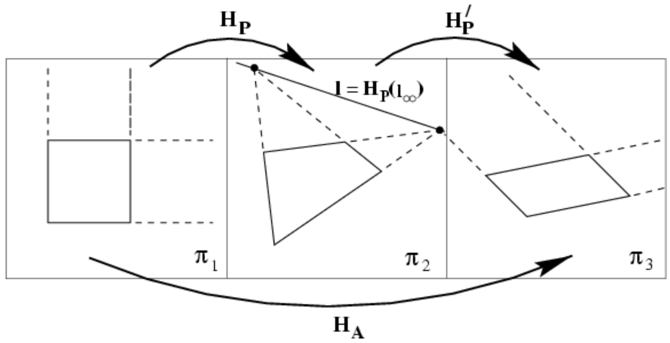
$$H'_P = \begin{pmatrix} l_0 & l_1 & l_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



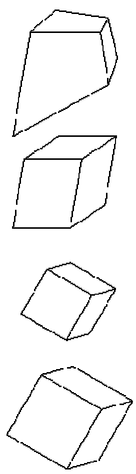
Transformace pohledu na afinní obraz

$$(x_0, x_1, x_2)^{\mathsf{T}} \rightarrow (x_0', x_1', x_2')^{\mathsf{T}} \rightarrow (x_0'', x_1'', x_2'')^{\mathsf{T}}$$

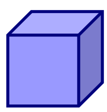
$$X' = \mathbf{H}_P X$$
$$X'' = \mathbf{H}_P' X' = \mathbf{H}_P' \mathbf{H}_P X$$



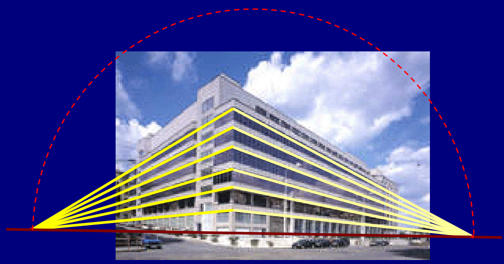
Projektivity v prostoru



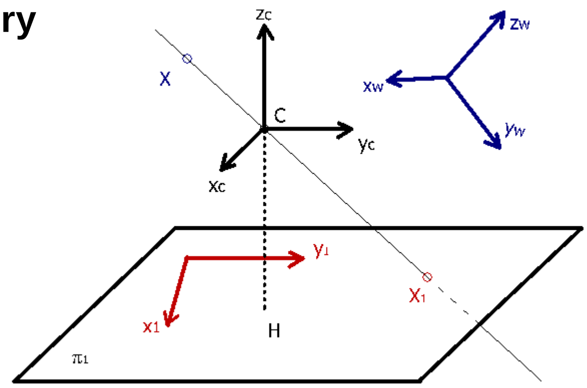
Projektivity 15dof	$\begin{bmatrix} 1 & b \\ \mathrm{t} & A \end{bmatrix}$	Incidence (průsečíky, tečna)
Afinity 12dof	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \mathrm{t} & A \end{bmatrix}$	Rovnoběžnost, dělící poměr **Nevlastní rovina π_∞**
Podobnosti 7dof	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \mathrm{t} & kR \end{bmatrix}$	**Absolutní kuželos. Ω_∞**
Shodnosti 6dof	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \mathrm{t} & R \end{bmatrix}$	Objem



Rekonstrukce snímku



Kalibrace kamery

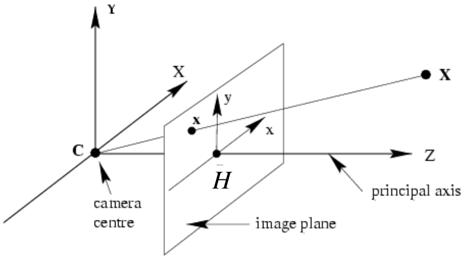


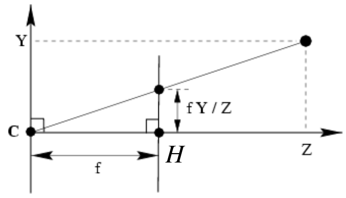
$$W\langle 0_W, x_W, y_W, z_W\rangle$$
$$C\langle C, x_c, y_c, z_c\rangle$$
$$I\langle 0_i, x_i, y_i,\rangle$$

$$W \xleftrightarrow{R,t} C \rightarrow I$$

- Vztah obecné báze W a báze objektivu kamety C – vnější parametry kamery(extrinsic)
- Vztah kamerových souřadnic v bázi C a souřadnic obrázku v bázi I – vnitřní parametry kamery (intrinsic)

Geometrie kamery
– (basic pinhole camera)





- Vztah mezi pixelovými souřadnicemi snímku a souřadnicemi pozorovaného objektu v pevně daném repéru – projekční matice kamery.
- Prostorová scéna je ze středu promítána na průmětnu

Předpokládejme, že zobrazení mezi P^3 a P^2 je lineární

Kalibrace kamery – středové promítání

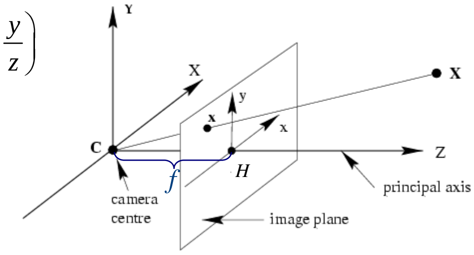
$$E^3 \to E^2 :, \ (1, x, y, z) \to \left(1, -f\frac{x}{z}, -f\frac{y}{z}\right)$$

$$x = \frac{x_1}{x_0}; y = \frac{x_2}{x_0}; z = \frac{x_3}{x_0}$$

$$P^3 \to P^2 : X \to X'$$

$$\left(1, \frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}, \frac{x_3}{x_0}\right) \to \left(1, -f\frac{x_1}{x_3}, -f\frac{x_2}{x_3}\right)$$

$$(x_0, x_1, x_2, x_3) \to (x_3, -fx_1, -fx_2)$$



$$X' = P_{persp}X = \bar{P}_{persp}(x_1, x_2, x_3)^T$$

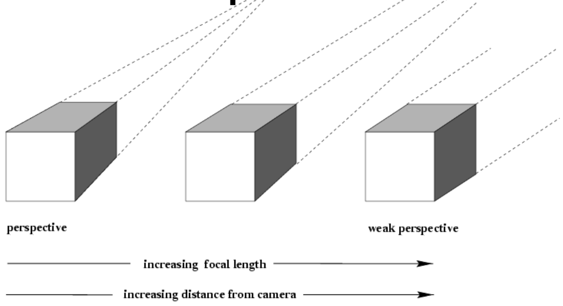
$$P_{persp} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -f & 0 \end{pmatrix} = \left[0 \ \bar{P}_{persp}\right]$$

$\bar{P}_{persp}$

- Sloupce P_{persp} jsou obrazy báze

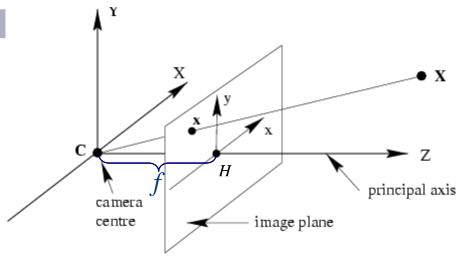
$$C = (1,0,0,0);$$
$$e_1 = (0,1,0,0);$$
$$e_2 = (0,0,1,0);$$
$$e_3 = (0,0,0,1);$$

Středové a rovnoběžné promítání



$$X' = P_{persp} X$$

$$P_{persp} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -f & 0 \end{pmatrix}$$

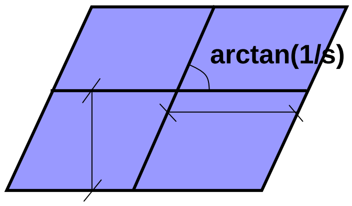


- Centrální rovina $x_3=0$ se zobrazí do nevlastní přímky $x'_0=0$
- Souřadnicová rovina $x_1=0$ se zobrazí do osy $x'_1=0$.
- Souřadnicová rovina $x_1=0$ se zobrazí do osy $x'_1=0$.

Matice vnitřní kalibrace kamery

$$K_{\text{int}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x_0 & m_x & 0 \\ y_0 & 0 & m_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & s \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x_0 & m_x & b \\ y_0 & 0 & m_y \end{pmatrix}$$

$$b = s \cdot m_x$$



Matice kalibrace kamery, projekční matice

$$P^3 \to P^2 : \; X \to X'$$

$$X' = P \cdot X \qquad P = K_{\text{int}} P_{persp} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & R \end{pmatrix}$$

$$P_{\text{int}} = K_{\text{int}} P_{persp} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x_0 & m_x & b \\ y_0 & 0 & m_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -f & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \underbrace{\begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ -m_x f & -bf & x_0 \\ 0 & -m_y f & y_0 \end{matrix}}_{K} \end{pmatrix} = [0\,K]$$

Matice kalibrace K $\quad K = K_{\text{int}} \overline{P}_{perp}$

$$P = [0\,K] \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -m_x f & -bf & x_0 \\ 0 & 0 & -m_y f & y_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & R \end{pmatrix} = K[t\,R]$$

$$\boxed{P = K[t\,R] = [Kt; KR]}$$

Projekční matice

- Sloupce matice zobrazení jsou obrazy báze $O_W=(1,0,0,0)$, $e_1=(0,1,0,0)$, $e_2=(0,0,1,0)$, $e_3=(0,0,0,1)$
  -První sloupec je obraz počátku O_W, další sloupce jsou úběžníky souřadnicových os x_W, y_W, z_W
- Střed kamery je jednodimenzionální prostor, který se zobrazí na nulový vektor, tj $PC=o$
- první řádek tvoří koeficienty obecné rovnice centrální roviny, druhý a třetí řádek určují koeficienty obecné rovnice promítacích rovin jejichž body se zobrazí do os x,y

$$P=[Kt\ KR]=\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} \end{pmatrix}$$

$$X'=\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} \end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p_{11}\\p_{21}\\p_{31}\end{pmatrix}$$

Numerický odhad projekční matice P
Direct Linear Transformation

- Předpokládejme, že zobrazení mezi P^3 a P^2 je lineární

$$X'=PX$$

$$P=[Kt\ KR]=\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix}P^1\\P^2\\P^3\end{pmatrix}$$

- P má 11 DoF,
  znalost dvojice bod ←→ průmět znamená 2 rovnice - minimální řešení vyžaduje alespoň 5 ½ dvojic

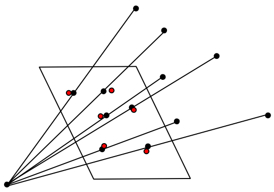
$$X'\times PX=\vec{o}$$

DLT

$$X' \times PX = \vec{o}$$

$$X' \times PX = \begin{pmatrix} x_0' \\ x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} P^1 X \\ P^2 X \\ P^3 X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1' P^3 X - x_2' P^2 X \\ -x_0' P^3 X + x_2' P^1 X \\ x_0' P^2 X - x_1' P^1 X \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} (0,0,0,0) & -x_2' X & x_1' X \\ x_2' X & (0,0,0,0) & -x_0' X \\ -x_1' X & x_0' X & (0,0,0,0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P^1 \\ P^2 \\ P^3 \end{pmatrix} = o$$

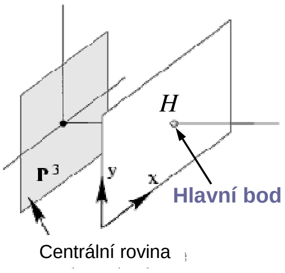


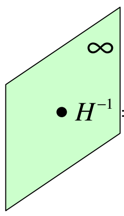
$$\mathrm{Ap} = 0$$

$$\min_P \sum_i d\left(X_i', PX_i\right)^2$$

$$\min_{\mathrm{p}} \|\mathrm{Ap}\|; \ \|\hat{\mathrm{p}}^3\| = 1$$

Hlavní bod – úběžník hloubkových přímek





$= (0, p_{12}, p_{13}, p_{14})$

Směrový vektor hloubkových přímek je kolmý k centrální rovině

$$P = [Kt \ KR] = \begin{pmatrix} p_{11} & \boxed{p_{12} \quad p_{13} \quad p_{14}} \\ p_{21} & p_{22} \quad p_{23} \quad p_{24} \\ p_{31} & p_{32} \quad p_{33} \quad p_{34} \end{pmatrix}$$

$$H = \mathrm{P}\left(0, p_{12}, p_{13}, p_{14}\right)^T = KR\left(p_{12}, p_{13}, p_{14}\right)^T$$

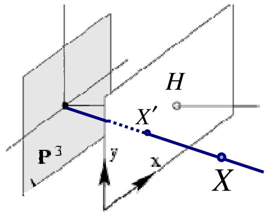
Průmět bodu

$$X' = PX$$

- Projekční matice $P=[Kt;\ KR]$ má v souřadném systému kamery tvar $P=K[O;I]=P_{int}$
- Kalibrovaná kamera - Známe-li vnitřní parametry kamery - matice kalibrace K

$$P_{\text{int}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -m_x f & -bf & x_0 \\ 0 & 0 & -m_y f & y_0 \end{pmatrix} = [0\,K]$$

- Všechny body na promítacím paprsku se promítnou do jednoho průmětu



$$X' = [0;K](t,\bar{X}) = K\bar{X}$$

$$\bar{X} = (K)^{-1} X'$$

Průmět bodu

$$X' = \mathrm{PX}$$

Obraz nevlastního bodu $u=(0,\bar{u})$ je nezávislý na translaci

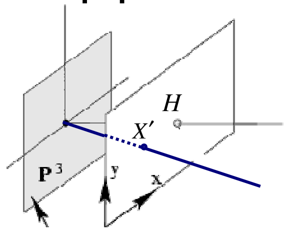
$$u' = \mathrm{P}\cdot(0\ \bar{u}) = [\mathrm{Kt\ KR}](0\ \bar{u}) = KR\cdot\bar{u}$$

Rekonstrukce bodů v prostoru – promítací paprsek

Bod na promítacím paprsku $\mathrm{X} = \mathrm{P}^{+}X'$

Pseudo-inverzní matice $\mathrm{P}^{+} = \mathrm{P}^{\mathrm{T}}\left(\mathrm{PP}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}; \mathrm{PP}^{+} = \mathrm{I}$

Promítací paprsek je dán směrem $u=(0,\ \bar{u})$ a středem C



$$\bar{u} = (KR)^{-1} u' = (KR)^{-1} X'$$

$$\mathrm{X}(\lambda) = \lambda u + \mathrm{C}$$

$$\mathrm{X}(\lambda) = \lambda\begin{pmatrix} 0 \\ (KR)^{-1} X' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -(KR)^{-1} Kt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ (KR)^{-1}(\lambda X' - \mathrm{Kt}) \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{PC} = o$$

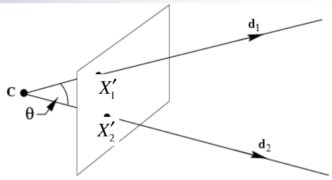
$$[Kt;KR](1,\bar{\mathrm{C}}) = o$$

$$Kt + (KR)\bar{C} = o$$

$$\bar{C} = -(KR)^{-1} Kt$$

Úběžníky

$$X' = [Kt; KR](0, \overline{X}) = KR\overline{X}$$
$$\overline{X} = (KR)^{-1} X'$$



- Směrové vektor promítacích paprsků

$$d_1 = (0, \overline{d}_1);\ \overline{d}_1 = (KR)^{-1} X_1'$$
$$d_2 = (0, \overline{d}_2);\ \overline{d}_2 = (KR)^{-1} X_2'$$

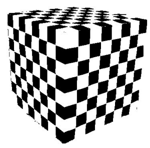
- Úhel mezi dvěma promítacími paprsky průmětů *X´, Y´*

$$\cos\theta = \frac{\overline{d}_1^{\,T}\overline{d}_2}{\sqrt{(\overline{d}_1^{\,T}\overline{d}_1)(\overline{d}_2^{\,T}\overline{d}_2)}} = \frac{X_1'^T (K^{-T}K^{-1}) X_2'}{\sqrt{(X_1'^T (K^{-T}K^{-1}) X_1')(X_2'^T (K^{-T}K^{-1}) X_2')}}$$

- Úběžníky kolmých směrů

$$X_1'^T (K^{-T}K^{-1}) X_2' = 0$$

Projektivita nevlastní roviny a průmětny



- Body nevlastní roviny $X = (0, \overline{X})$

$$X' = [Kt; KR](0, \overline{X}) = KR\overline{X}$$

- Absolutní kuželosečka v nevlastní rovině

$$x_0 = 0;\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0 \Rightarrow X = (0, \overline{X});\ \overline{X}^T \cdot I \cdot \overline{X} = 0$$

- Obraz absolutní kuželosečky $\omega = (KK^T)^{-1}$

$$X' = KR\overline{X}$$
$$\overline{X} = (KR)^{-1} X'$$
$$\overline{X}^T = X'^T (KR)^{-T}$$

$$\overline{X}^T \cdot I \cdot \overline{X} = 0$$
$$X'^T (KR)^{-T} I (KR)^{-1} X' = 0$$
$$X'^T (KRR^T K^T)^{-1} X' = 0$$
$$X'^T (KK^T)^{-1} X' = 0$$

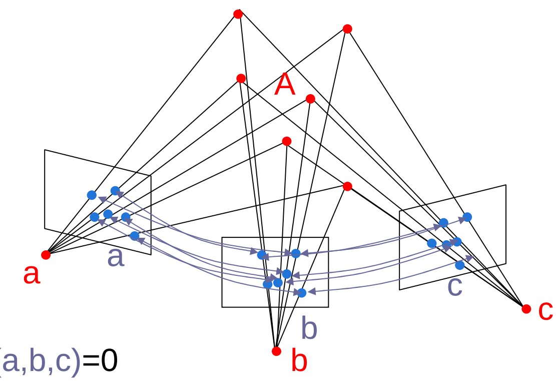
- Úhel mezi promítacími paprsky bodů X_1, X_2.

$$\cos\theta = \frac{X_1'^T (K^{-T}K^{-1}) X_2'}{\sqrt{(X_1'^T (K^{-T}K^{-1}) X_1')(X_2'^T (K^{-T}K^{-1}) X_2')}} = \frac{X_1'^T \omega X_2'}{\sqrt{(X_1'^T \omega X_1')(X_2'^T \omega X_2')}}$$

Epipolární geometrie

Dvojstředové promítání

Rekonstrukce scény



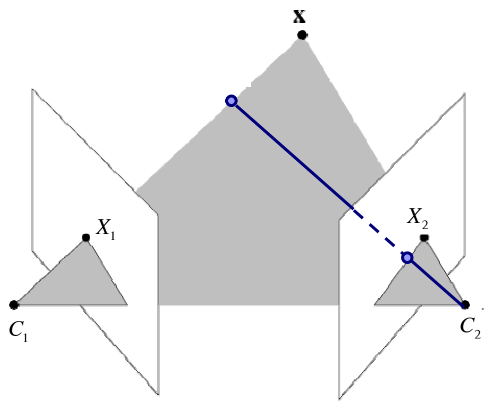
f(a,b,c)=0

(a,b)→ A (rekonstrukce)

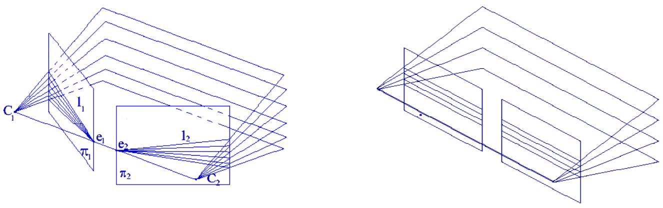
(a,b,c)→ (a,b,c) (kalibrace)

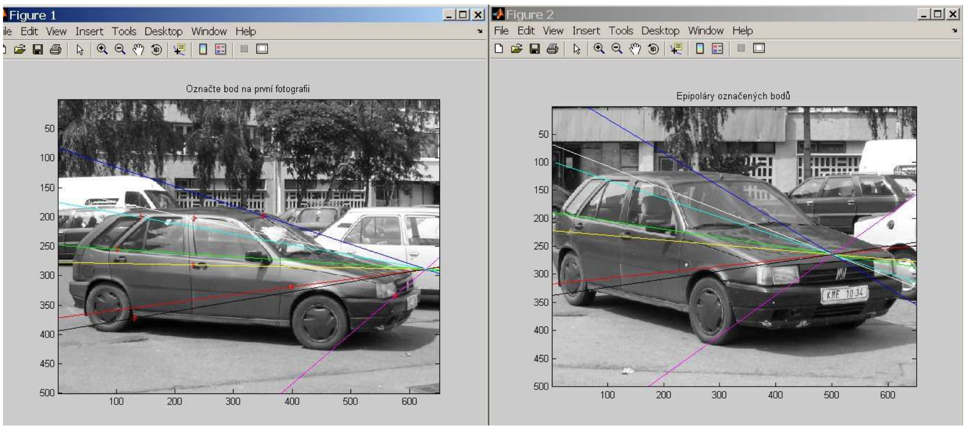
(a,b)→ c (transformace)

Promítací rovina bodu – epipolární rovina



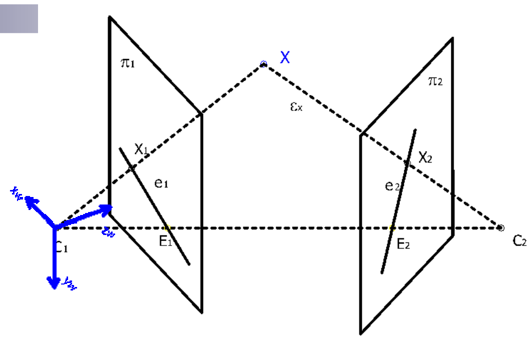
Epipoláry





Esenciální matice

- C_1, C_2 středy promítání
- E_1, E_2 epipóly
- X_1, X_2 průměty bodu X
- e_1, e_2 epipoláry bodu X
- ε_x epipolární rovina



Matice kalibrace K_1, K_2 jsou známy – přejdeme k normalizovaným souřadnicím obrazu $\hat{X}_1 = K_1^{-1} X_1$, $\hat{X}_2 = K_2^{-1} X_2$

$$X_1 = P_1 X = K_1 [O, I] X, \quad X_2 = P_2 X = K_2 [t, R] X, \quad X_1 = K_1 \hat{X}_1, \; X_2 = K_2 \hat{X}_2$$

$$\hat{X}_2 = (t \; R) X, \; \hat{X}_1 = (O \; I) X$$

$$\hat{X}_1 \cdot (t \times R \hat{X}_2) = 0$$

$$\hat{X}_1^{\,T} \cdot \underbrace{(t_M \cdot R)}_{\mathbf{E}} \cdot \hat{X}_2 = 0$$

$$\boxed{\begin{gathered} 0 = \hat{X}_1^T \cdot E \cdot \hat{X}_2 \\ E = t_M \cdot R \\ t_M = \begin{pmatrix} 0 & -t_3 & t_2 \\ t_3 & 0 & -t_1 \\ -t_2 & t_1 & 0 \end{pmatrix} \end{gathered}}$$

Fundamentální a Esenciální matice

- Pro esenciální matici pohledů E platí: $E = t_M \cdot R$
- Pokud uvažujeme matice kalibrace K_1 K_2, pak vztah mezi průměty určuje tzv. fundamentální matice:

$$X_1 = K_1 \hat{X}_1, \; X_2 = K_2 \hat{X}_2$$

$$\hat{X}_1^{\,T} \cdot E \cdot \hat{X}_2 = 0$$

$$\left(K_1^{-1} X_1\right)^T \cdot E \cdot K_2^{-1} X_2 = 0$$

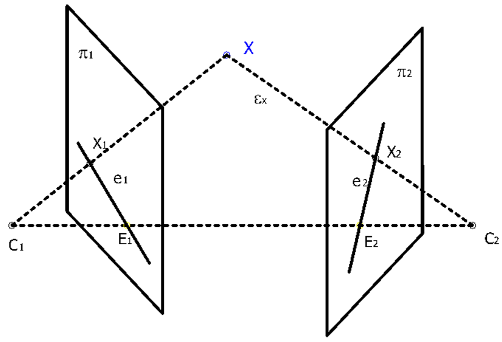
$$X_1^T \underbrace{\left(K_1^{-T} E K_2^{-1}\right)}_{\mathbf{F}} X_2 = 0$$

$$\boxed{\begin{gathered} 0 = X_1^T \cdot F \cdot X_2 \\ F = K_1^{-T} t_M \cdot R K_2^{-T} \\ t_M = \begin{pmatrix} 0 & -t_3 & t_2 \\ t_3 & 0 & -t_1 \\ -t_2 & t_1 & 0 \end{pmatrix} \end{gathered}}$$

Zobrazení průmětu na epipoláry

$$0 = X_1^T \cdot F \cdot X_2$$
$$0 = X_1^T \cdot e_1$$

$$0 = X_2^T \cdot \left(X_1^T \cdot F\right)^T$$
$$0 = X_2^T \cdot F^T \cdot X_1$$
$$0 = X_2^T \cdot e_2$$



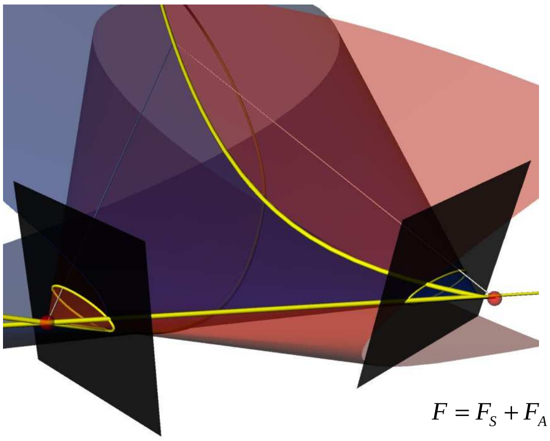
- Fundamentální matice *F* určuje zobrazení

$$X_2 \rightarrow e_1 : \ e_1 = FX_2$$
$$X_1 \rightarrow e_2 : \ e_2 = F^T X_1$$

- Hodnost *h(F)= 2* ⇒ fundamentální matice má 7 DoF
- Epipóly E_1, E_2

$$e_1 = FX_2$$
$$E_1^T e_1 = \left(E_1^T F\right) X_2 = 0 \Rightarrow E_1^T F = o$$
$$e_2 = F^T X_1$$
$$e_2^T E_2 = \left(F^T X_1\right)^T E_2 = 0 \Rightarrow FE_2 = o$$

Samodružné body



$$0 = X_1^T \cdot F \cdot X_2$$
$$0 = X_1^T \cdot F_S \cdot X_1$$

$$F = F_S + F_A;\ F_S = \frac{F + F^T}{2};\ F_A = \frac{F - F^T}{2}$$

Fundamentální matice

- Předpokládejme dva perspektivní průměty $C_1 \neq C_2$. Dvojice X_1, X_2 je dvojicí vzájemně si odpovídajících si průmětů právě tehdy, když

$$\exists F, \quad X_1^T F X_2 = 0$$

- Pro dva pohledy je matice F určena jednoznačně a nezávisí na transformaci souřadnic.
- Jestliže F je fundamentální matice pro přechod *(P,P')*, potom F^T je fundamentální matice pro *(P',P)*
- Daná fundamentální matice určuje dvojici kamerových matic až na násobení projektivní maticí.

  Nechť F je fundamentální matice, $P_1\ P_2$, $P_1'P_2'$ jsou páry projekčních matic, takové, že F je fundamentální matice obou párů. Pak existuje regulární matice H

$$P_1' = P_1 H \quad P_2' = P_2 H$$

8 – bodový algoritmus pro určení matice F

$${}^iX_1^T F\, {}^iX_2 = 0 \Rightarrow \left(1, {}^ix_1, {}^iy_1\right) \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ {}^ix_2 \\ {}^iy_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$f = (f_{11}, f_{12}, f_{13}, f_{21}, f_{22}, f_{23}, f_{31}, f_{32}, f_{33})$$

$$\left(1 \quad {}^ix_2 \quad {}^iy_2 \quad {}^ix_1 \quad {}^ix_1{}^ix_2 \quad {}^ix_1{}^iy_2 \quad {}^iy_1 \quad {}^iy_1{}^ix_2 \quad {}^iy_1{}^iy_2\right) f = 0$$

Pro n dvojic odpovídajících si průmětů X_1 a X_2 dostáváme homogenní soustavu n lineárních rovnic.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & {}^1x_2 & {}^1y_2 & {}^1x_1 & {}^1x_1{}^1x_2 & {}^1x_1{}^1y_2 & {}^1y_1 & {}^1y_1{}^1x_2 & {}^1y_1{}^1y_2 \\ 1 & {}^2x_2 & {}^2y_2 & {}^2x_1 & {}^2x_1{}^2x_2 & {}^2x_1{}^2y_2 & {}^2y_1 & {}^2y_1{}^2x_2 & {}^2y_1{}^2y_2 \\ & & & & \vdots & & & & \\ 1 & {}^nx_2 & {}^ny_2 & {}^nx_1 & {}^nx_1{}^nx_2 & {}^nx_1{}^ny_2 & {}^ny_1 & {}^ny_1{}^nx_2 & {}^ny_1{}^ny_2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} f = 0$$

$$Af = o$$

$$\min_{f \in R^9} \|Af\|^2 \Rightarrow f \text{ je vlastní vektor matice } A^TA \text{, příslušný k } \lambda_{\min}.$$

Vlastnosti esenciální matice

$$E = t_M \cdot R \qquad t_M = \begin{pmatrix} 0 & -t_3 & t_2 \\ t_3 & 0 & -t_1 \\ -t_2 & t_1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Esenciální matice má 5 DoF
- $E_{(3x3)}$ je esenciální maticí, právě tehdy když jsou dvě singulární čísla shodná a třetí sing. číslo je nula:

  Důkaz: Uvažujme ortogonální matici *W* a antisymetrickou matici *Z=diag(1,1,0)W*

$$W = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad Z = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Každá antisymetrická matice T_M může být rozložena $T_M = kUZU^T$, kde U je ortogonální.

$$T_M = k\mathrm{U} \cdot \mathrm{diag}(1,1,0) \cdot \mathrm{WU}^{\mathrm{T}}$$

$$\mathrm{E} = T_M \mathrm{R} = \mathrm{Udiag}(1,1,0)\mathrm{WU}^{\mathrm{T}} R$$

Sestrojení esenciální matice E

- Sestrojíme-li pro libovolnou matici **F**(3x3) rozklad

$$\text{SVD: } F = U \cdot \mathrm{diag}\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\} V^T;\ U, V \in O(3, R)$$

  pak matice

$$E = U \cdot \mathrm{diag}\{\sigma, \sigma, 0\} V^T; \sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}$$

  je esenciální matice s minimální Frobeniovou vzdáleností od F.

- E je určena až na násobek ⇒ normalizujeme ⇒ σ=1 ⇒||*t*||=1

$$E = t_M R = U \cdot \mathrm{diag}\{1,1,0\} \; W \cdot U^T \cdot R; \; W = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in O(3, R); U \in O(3, R)$$

$$E = U \cdot \mathrm{diag}\{1,1,0\} \cdot V \Rightarrow R = UW^T V, \; t_M = U \cdot \mathrm{diag}\{1,1,0\} \cdot W \cdot U^T$$

$$t = U \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Konstrukce projekčních matic z esenciální matice E

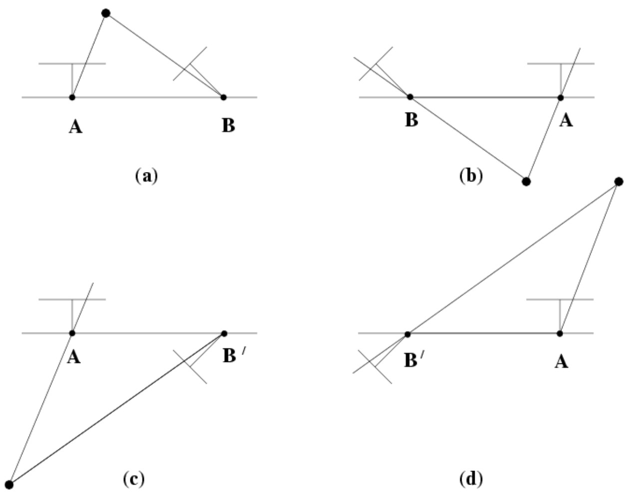
- Pro danou esenciální matici $E = U \cdot \mathrm{diag}\{1,1,0\}V^T$ a pro volbu prvního kamerového systému P_1 = [0, I] existují 4 možné volby projekční matice P_2.

$$P_2 = \left[\pm u_3 \;\; UWV^T\right] \qquad P_2 = \left[\pm u_3 \;\; UW^TV^T\right] \qquad W = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nevýhody osmibodového algoritmu

- Esenciální matice má 5 volitelných parametrů (**x** potřebujeme 8 bodů)
- Je možné řešit jen pro případ *t≠o.*
- Detekované průměty bodů X_1, X_2 musí odpovídat bodům v „obecné" poloze.

4 možnosti pro rekonstrukci E



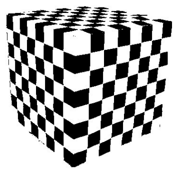
- Jen jedno řešení kdy je scéna před oběma kamerami

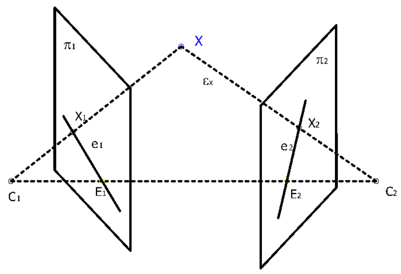
Rekonstrukce objektu – Kalibrovaná matice

- Kalibrované pohledy
  - 8 bodovým algoritmem určíme F
  - Z matic kalibrace určíme odhad esenciální matice

$$\left(K_1^{-T} E K_2^{-1}\right) = 0$$

  - Rozkladem určíme projekční matice
  - Z odpovídajících si průmětů sestrojíme bod v prostoru





Rekonstrukce objektu

Pokud body *X* v prostoru transformujeme projektivitou *H*,

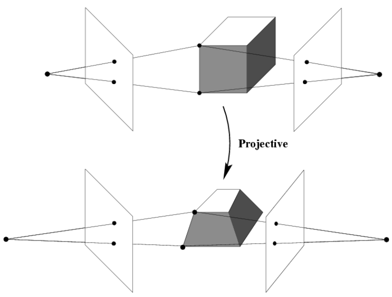
$$\hat{X} = HX$$

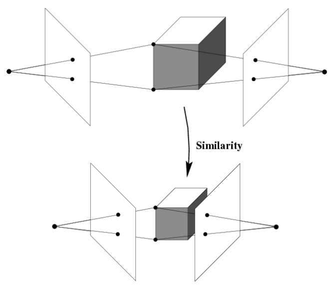
pak jsou projekční matice tvaru

$$\hat{P}_1 = P_1 H^{-1}; \hat{P}_2 = P_2 H^{-1}$$

$$X_i = P_i X$$

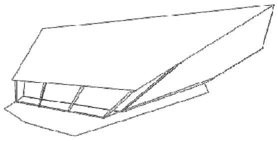
$$X_i = \left(\hat{P}_i H\right)\left(H^{-1} \hat{X}\right)$$

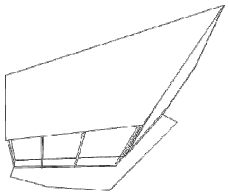




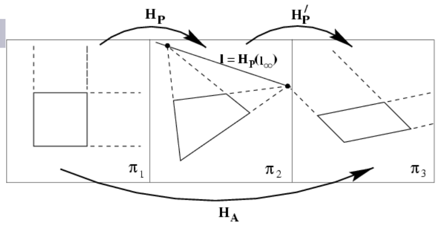
Rekonstrukce objektu

- Jestliže množina dvojic průmětů určuje fundamentální matici jednoznačně, potom může být 3D scéna zrekonstruována a každé dvě takové rekonstrukce jsou projektivně ekvivalentní.
- Projektivní rekonstrukce – zjištění vlastností invariantních v grupě projektivit (dělicí dvojpoměr, incidence)
- Afinní rekonstrukce – zjištění vlastností invariantních v grupě afinit (dělící poměr, rovnoběžnost)
- Metrická rekonstrukce – zjištění vlastností invariantních v grupě podobností





Afinní rekonstrukce



- určíme obraz nevlastní roviny π zrekonstruované scény a použijeme projektivní zobrazení, které ji zobrazí zpět na nevlastní rovinu $x_0' = 0$.

$$H = \begin{pmatrix} \pi_0 & \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Afinní rekonstrukce

- Známe –li kamerové matice afinní rekonstrukce, $P_1=[t_1\ M_1]$, $P_2=[t_2\ M_2]$, pak afinita mezi snímky je dána maticí $Q=M_2M_1^{-1}$.

D: *Obraz nevlastního bodu*: $X=(0,\overline{X})$

$$X_1=[t_1\ \ M_1]\overline{X}=M_1\overline{X},$$
$$X_2=[t_2\ \ M_2]\overline{X}=M_2\overline{X}$$
$$\boxed{\Rightarrow X_2=M_2M_1^{-1}X_1}$$

Metrická rekonstrukce

- určíme obraz absolutní kuželosečky v nevlastní rovině ω zrekonstruované scény a použijeme projektivní zobrazení, které ji zobrazí zpět na absolutní kuželosečku.

$$x_0=0;\ x_1^2+x_2^2+x_3^2=0\Rightarrow X=(0,\overline{X});\overline{X}^T\cdot I\cdot\overline{X}=0$$
$$\omega=(KK^T)^{-1}$$

- Předpokládejme, že je známý obraz absolutní kuželosečky a máme již scénu afinně zrekonstruovanou. Pak od afinní rekonstrukce můžeme přejít k metrické rekonstrukci 3D transformací.

$$H=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & A^{-1}\end{bmatrix};\quad AA^T=(M^T\omega M)^{-1}$$

Obraz absolutní kuželosečky

$$\omega = \left(KK^T\right)^{-1}$$

- úběžníky vzájemně kolmých směrů v_1, v_2

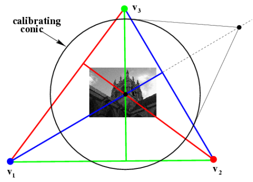
$$v_1^T \omega v_2 = 0$$

- úběžník v přímky kolmé k rovině dané úběžnicí l.

$$l = \omega v$$

- Autokalibrace z více snímků. Je-li sestrojen dostatečný počet snímků stejným fotoaparátem (pohyblivá kamera)

$$\omega = H_\infty^{-T} \omega H_\infty^{-1}$$



Rekonstrukce scény

Známé parametry		Rekonstrukce
Páry odpovídajících si bodů	F	Projektivní
Obraz roviny v nekonečnu	F, H_∞	Afinní
IAC, kalibrační matice	F, H_∞ ω, ω'	Metrická