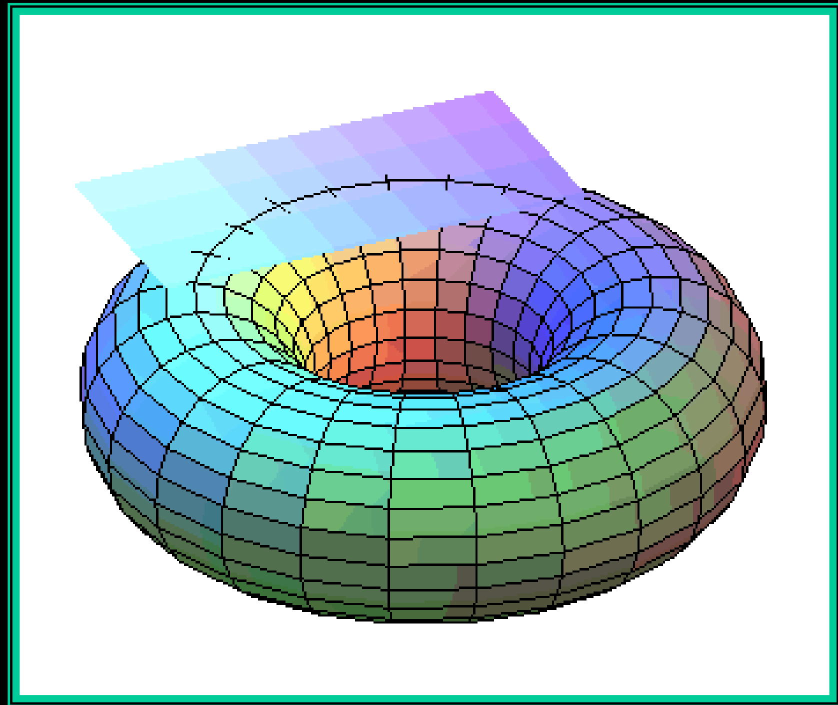
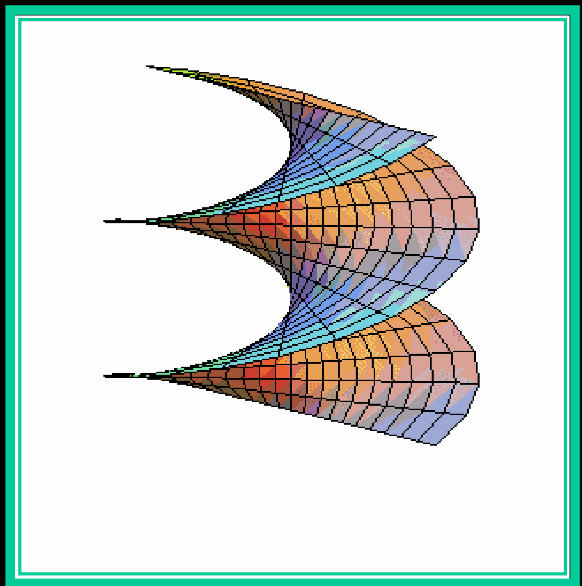
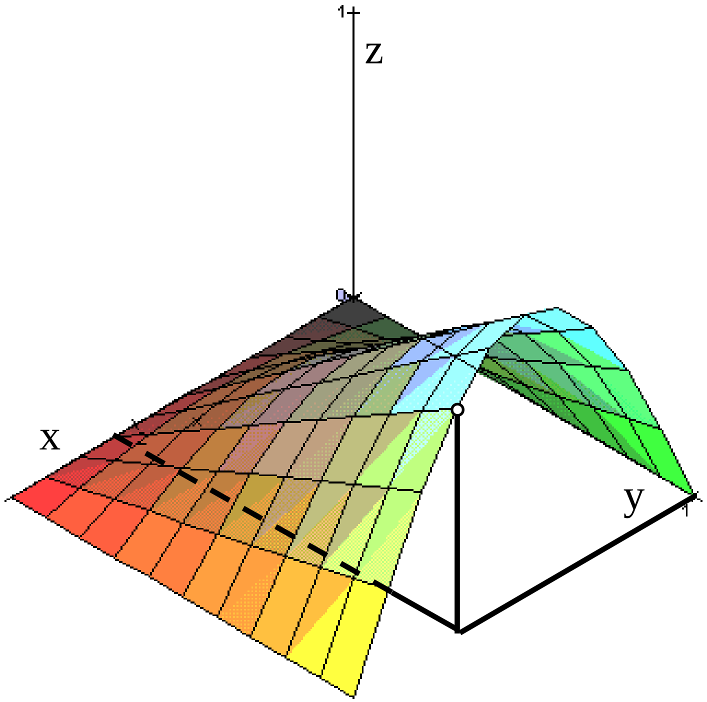
Diferenciální geometrie ploch





Vyjádření plochy

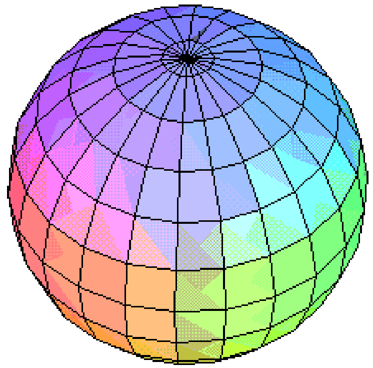
Explicitní: $z = f(x,y)$; $[x,y] \subset \Omega$



$z = y \cdot \sin x$

$x \in \langle 0, \pi \rangle; \quad y \in \langle 0,1 \rangle$

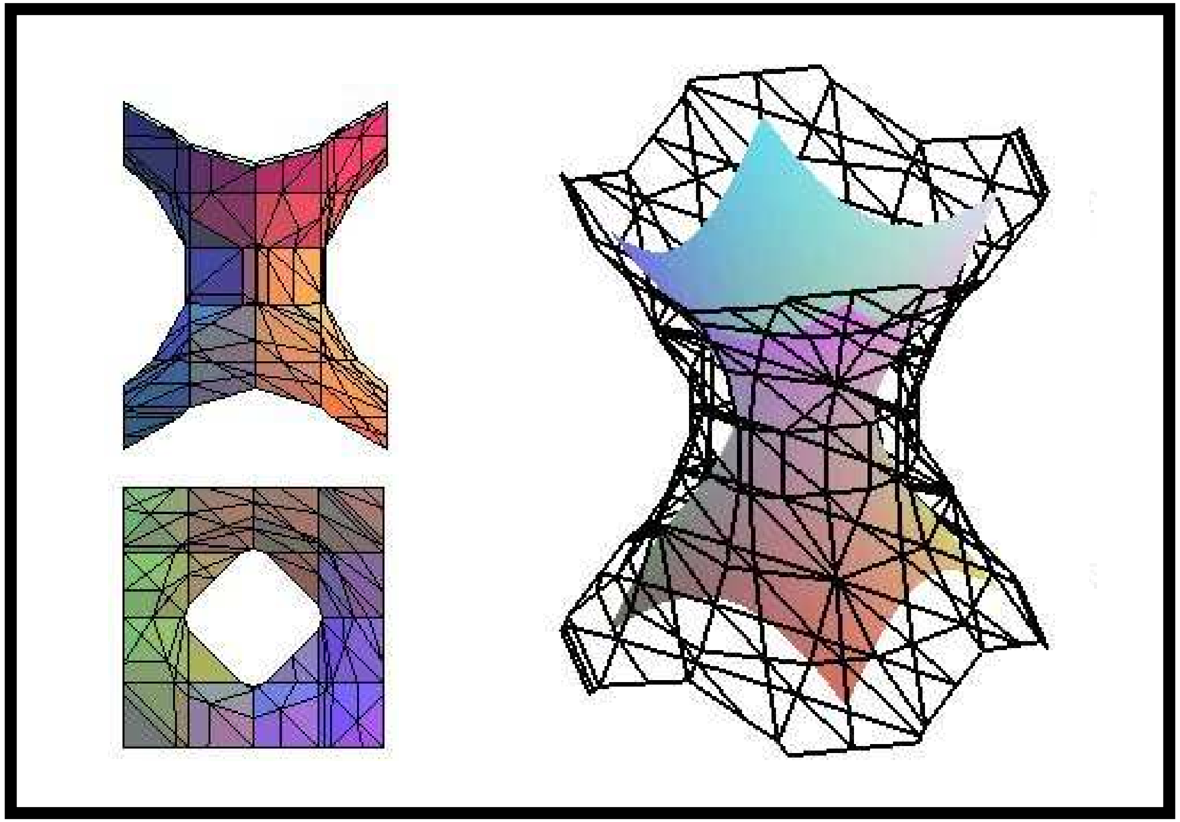
Implicitní: $F(x,y,z)=0$



$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$

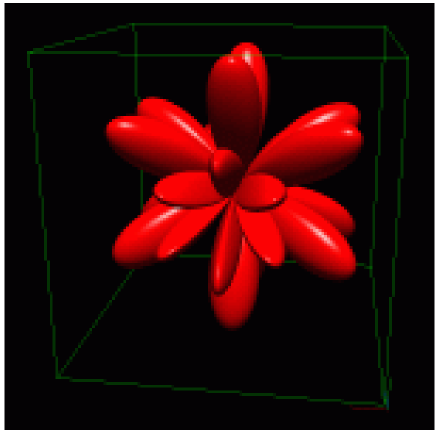
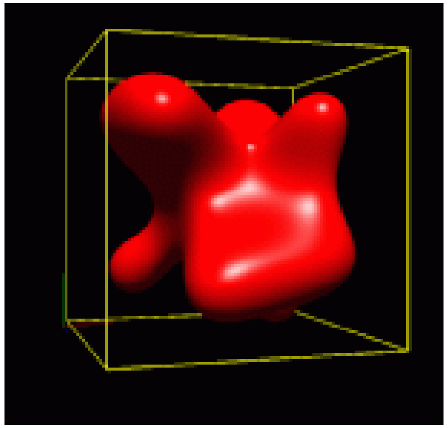
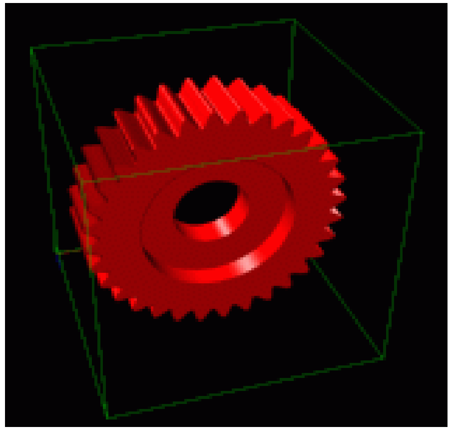
Implicitní plochy
blooby objects, meta balls

Izoplochy: F(x,y,z)=*konst.*



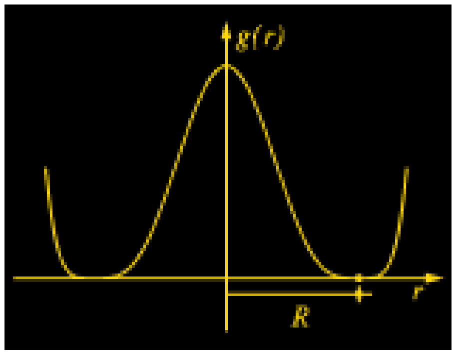
Implicitní plochy
blooby objects, meta balls

Izoplochy: F(x,y,z)=*konst.*

Skalární pole, které každému bodu prostoru P přiřadí číslo I (P)

$$I(P) \rightarrow \sum_{i} c_i F_i(d_i)$$



Parametrizace kulové plochy

$$|OM_1| = d$$

$$x = d \cdot \cos\varphi \qquad d = r \cdot \cos\psi$$

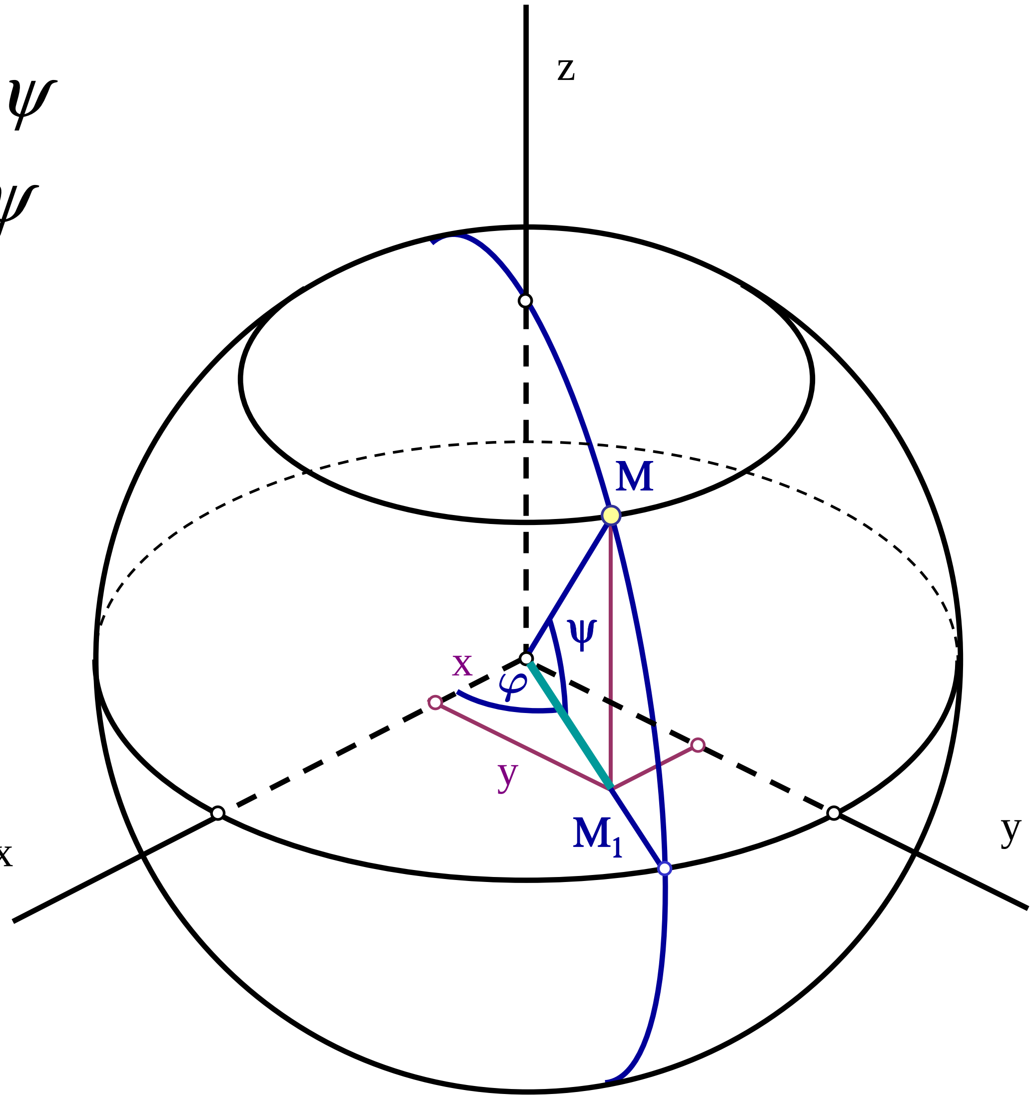
$$y = d \cdot \sin\varphi \qquad z = r \cdot \sin\psi$$

$$x = r \cdot \cos\psi \cdot \cos\varphi$$

$$y = r \cdot \cos\psi \cdot \sin\varphi$$

$$z = r \cdot \sin\psi;$$

$$\varphi \in \langle 0, 2\pi); \quad \psi \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$$

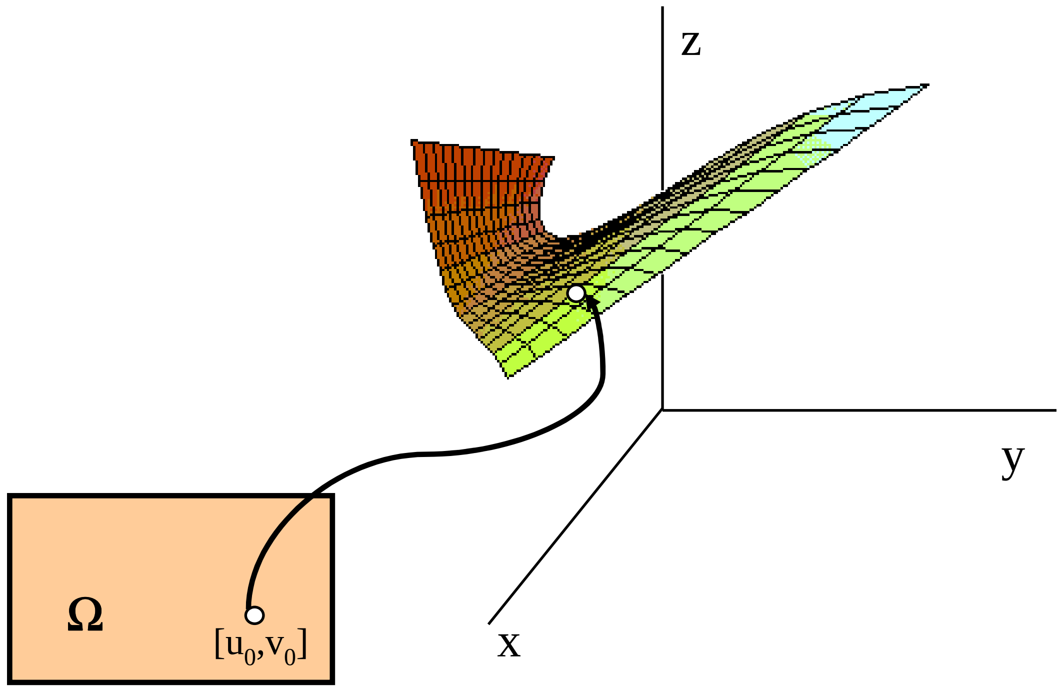


Parametrické vyjádření plochy

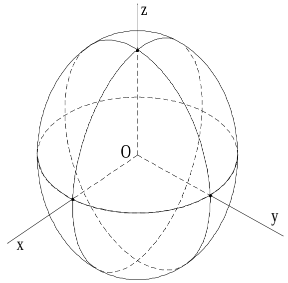
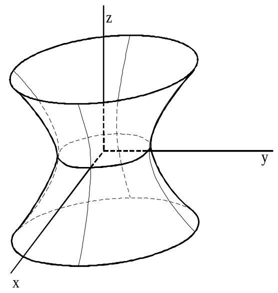
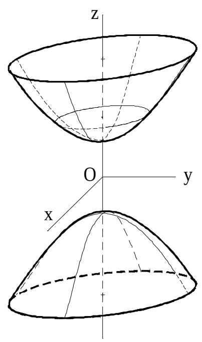
Regulární plocha třídy C^n je dána vektorovou funkcí $P(u,v)$: $\Omega \rightarrow E^3$, $[u, v] \rightarrow [x, y, z]$

$P(u,v) = [x(u,v); y(u,v); z(u,v)]$ splňující následující vlastnosti:

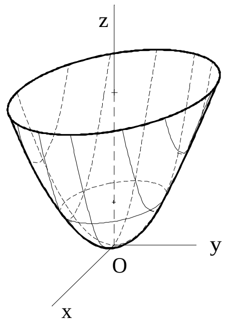
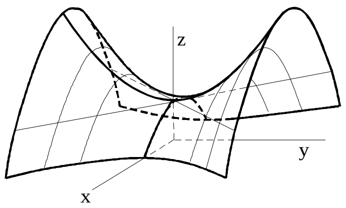
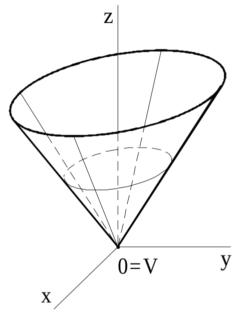
1. Ω je otevřená kompaktní množina
2. $\Omega \rightarrow E^3$ je vzájemně jednoznačné zobrazení se spojitými derivacemi do n-tého řádu
3. parciální derivace $\frac{\partial P}{\partial u}, \frac{\partial P}{\partial v}$ jsou lineárně nezávislé



Kvadriky – algebraické plochy 2. stupně

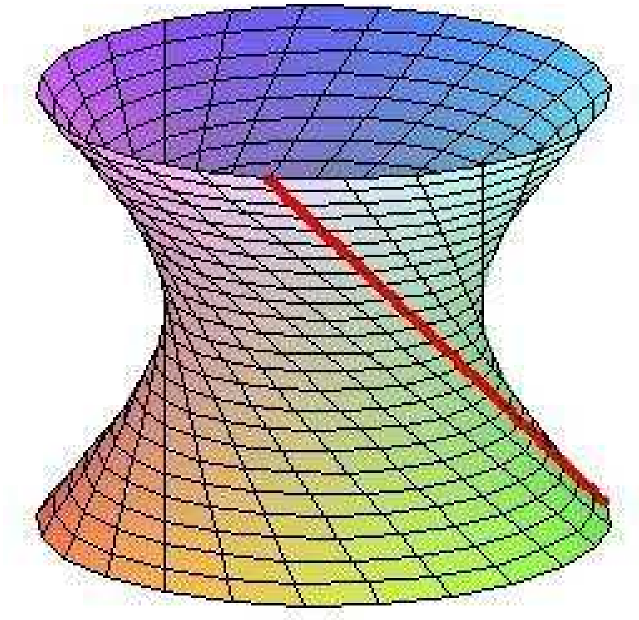
Trojosý elipsoid $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$		$x=a\cos u\cos t$ $y=b\cos u\sin t$ $z=c\sin u$
Jednodílný hyperboloid $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$		$x=a\cosh u\cos t$ $y=b\cosh u\sin t$ $z=c\sinh u$
Dvoudílný hyperboloid $$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$		$x=a\cosh u$ $y=b\cos t\sinh u$ $z=c\sin t\sinh u$

Kvadriky – algebraické plochy 2. stupně

Parabolický paraboloid $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z$$		$x=at$ $y=bu$ $z=t^2+u^2$
Hyperbolický paraboloid $$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=z$$		$x=at$ $y=bu$ $z=t^2-u^2$
Kuželová plocha $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z^2$$		$x=at\cos u$ $y=bt\sin u$ $z=t$

Křivka na ploše

Plocha $P(u,v) = [x(u,v)\ ;\ y(u,v)\ ;\ z(u,v)]$



Křivka na ploše má parametrické vyjádření
$K(t) = [x\,(u(t), v(t));\ y\,(u(t), v(t));\ z\,(u(t), v(t))]$

$x = x\,(u(t), v(t))$
$y = y\,(u(t), v(t))$
$z = z\,(u(t), v(t))$

- u konstantní $u=u_0$... parametrická v křivka $K(v)=P(u_0,v) = [x(u_0,v)\ ;\ y(u_0,v)\ ;\ z(u_0,v)]$

- v konstantní $v=v_0$... parametrická u křivka $K(u)=P(u,v_0) = [x(u,v_0)\ ;\ y(u,v_0)\ ;\ z(u,v_0)]$

Rotační válec

Implicitní rovnice:

$\boldsymbol{x^2+y^2 = r^2}$

Parametrické rovnice:

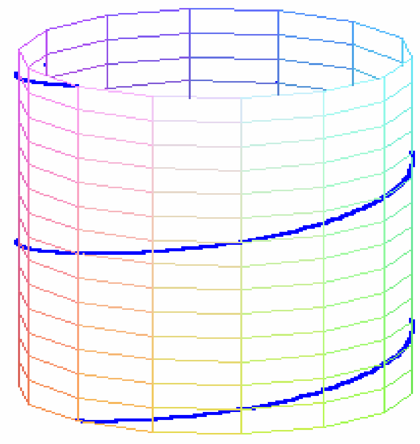
$x = r \cos u$

$y = r \sin u$

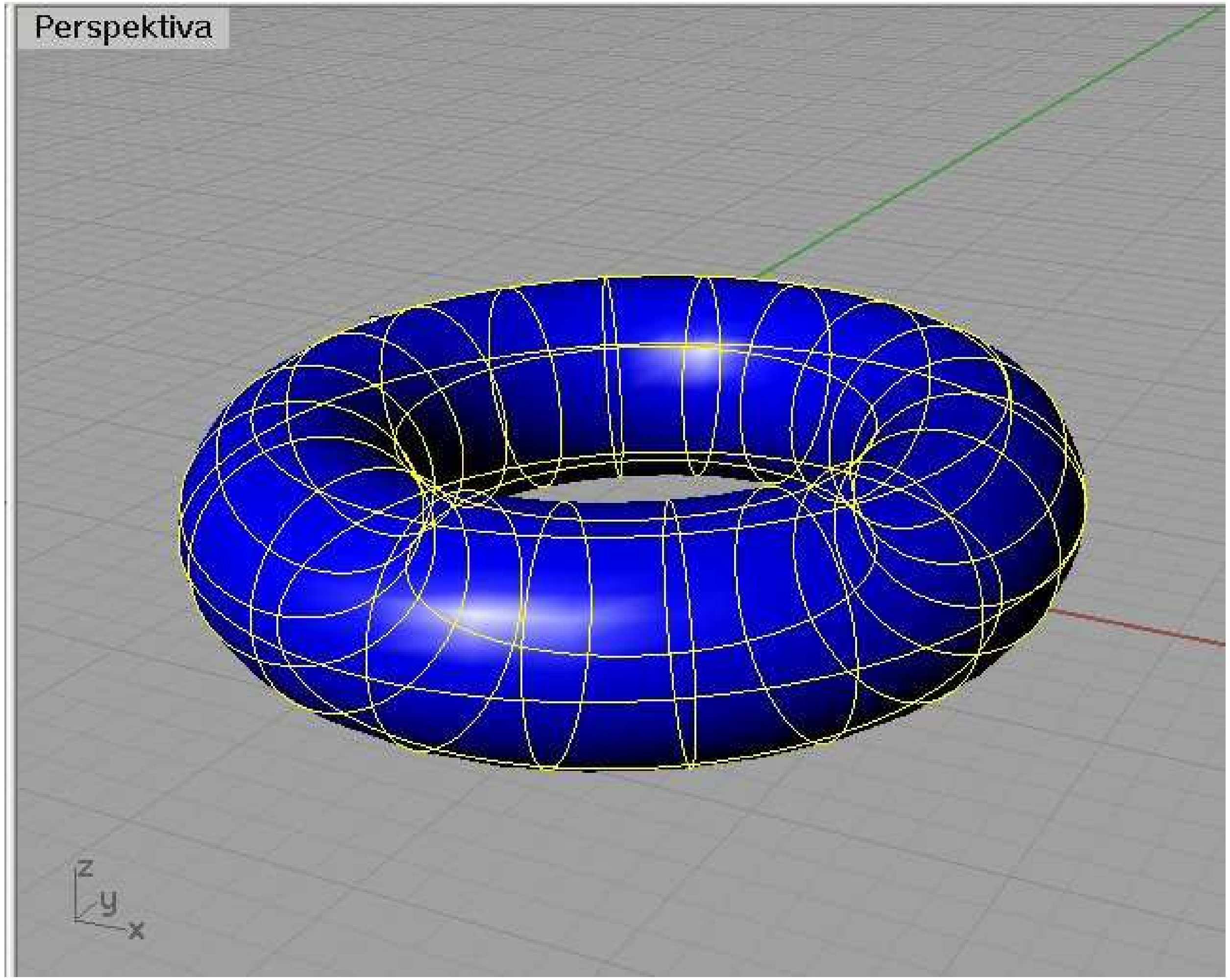
$z = v \; , u \in <0, 2\pi>, v \in <0, h>$

křivka na ploše:

$u = t, v = t, \quad t \in <0, 4\pi>$



Parametrické křivky - izočáry



Transformace parametru

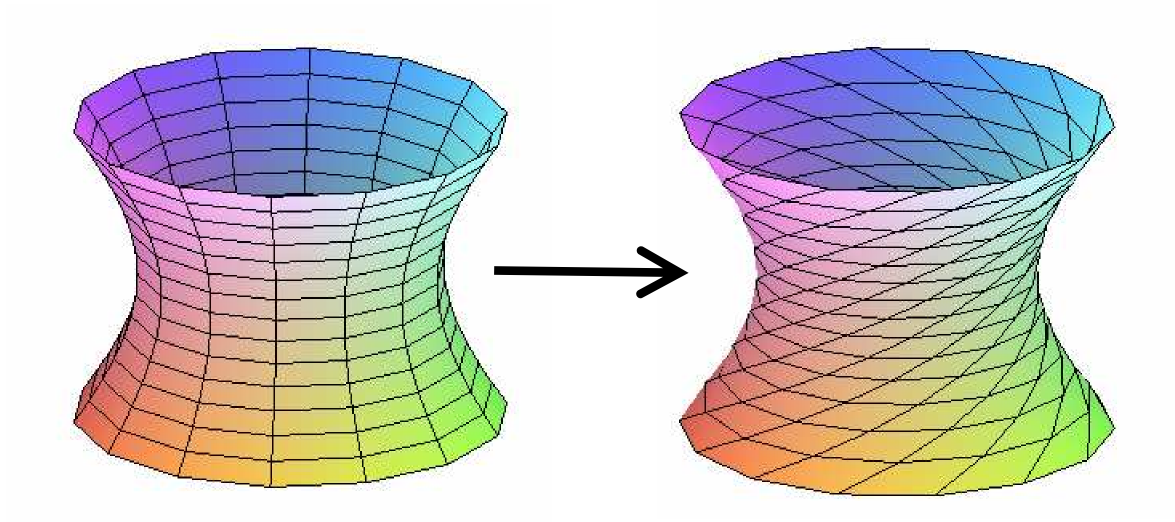
Plocha je dána vektorovou funkcí $P(u,v)$ na oblasti Ω a nechť je dána bijekce $\overline{\Omega} \to \Omega$ $u = \varphi_1(\overline{u},\overline{v}), v = \varphi_2(\overline{u},\overline{v})$. Nechť

1. φ_1, φ_1 jsou třídy C^n
2. na $\overline{\Omega}$ je Jakobián J nenulový

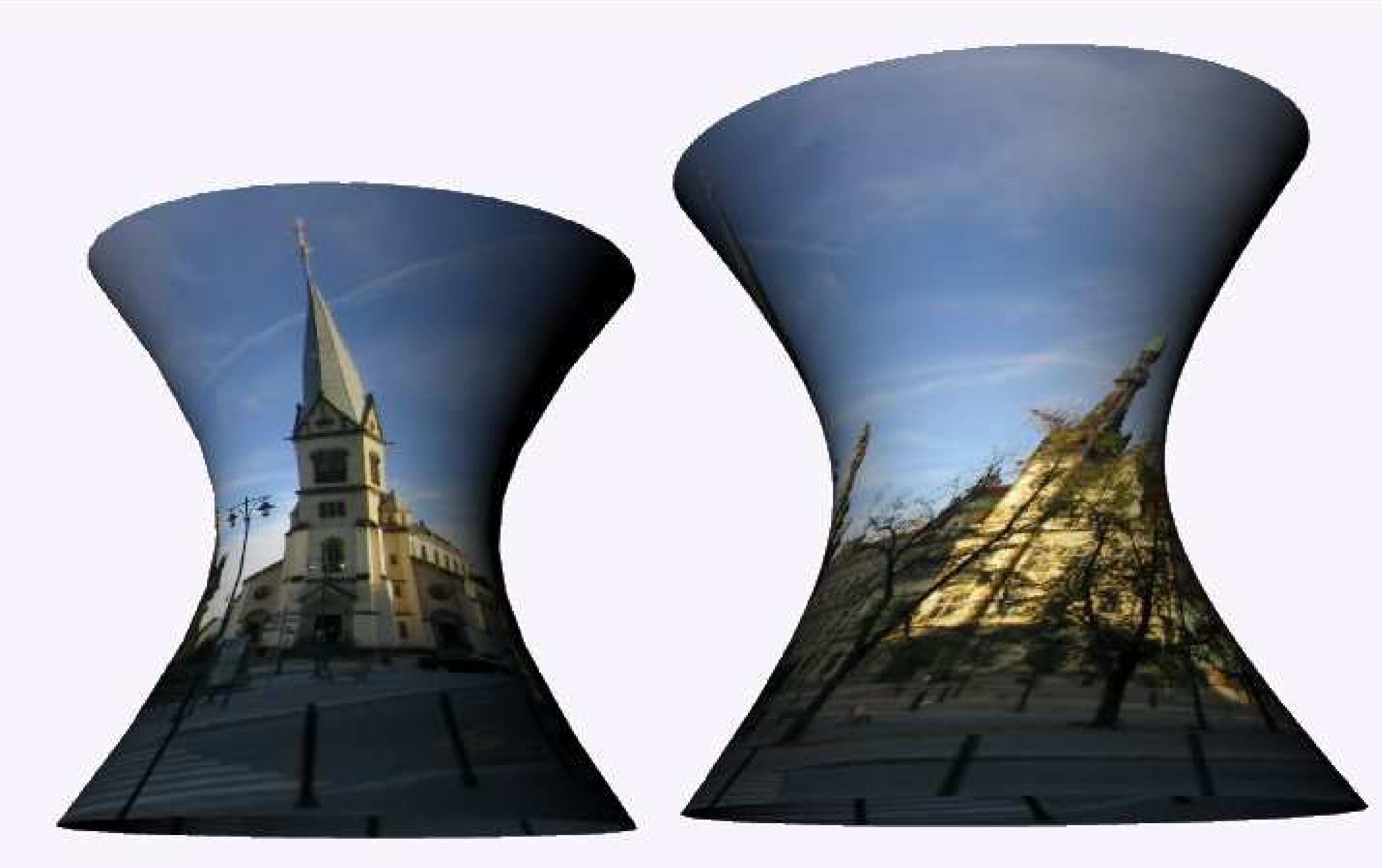
$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial \overline{u}} & \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial \overline{u}} \\ \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial \overline{v}} & \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial \overline{v}} \end{vmatrix}$$

$P := [\cosh(u)\cos(v), \cosh(u)\sin(v), \sinh(u)]$

$Pt := [\cosh(u)\cos(v+2u), \cosh(u)\sin(v+2u), \sinh(u)]$



Transformace parametru



Tečná rovina plochy

Pokud tečny všech křivek k_i tvoří rovinu τ , pak bod *T* nazveme **regulárním** bodem plochy a rovinu τ **tečnou** rovinu plochy.

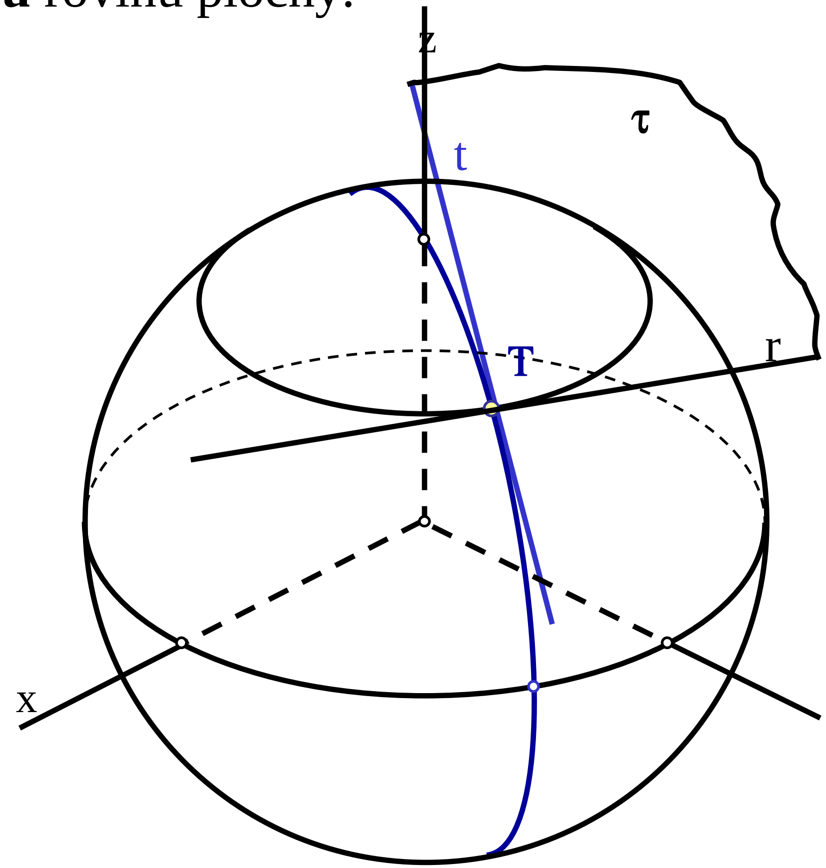
Plocha je dána parametricky:
P (u,v) = [x(u,v); y (u,v); z (u,v)]

Tečná rovina plochy v bodě *T*:

$$\tau(u,v) \equiv T + u\vec{t} + v\vec{r}$$

$$\vec{t} = \left(\frac{\partial x}{\partial u}; \frac{\partial y}{\partial u}; \frac{\partial z}{\partial u} \right)$$

$$\vec{r} = \left(\frac{\partial x}{\partial v}; \frac{\partial y}{\partial v}; \frac{\partial z}{\partial v} \right)$$



Normála plochy – přímka kolmá na tečnou rovinu

$$\vec{n} = \vec{t} \times \vec{r}$$

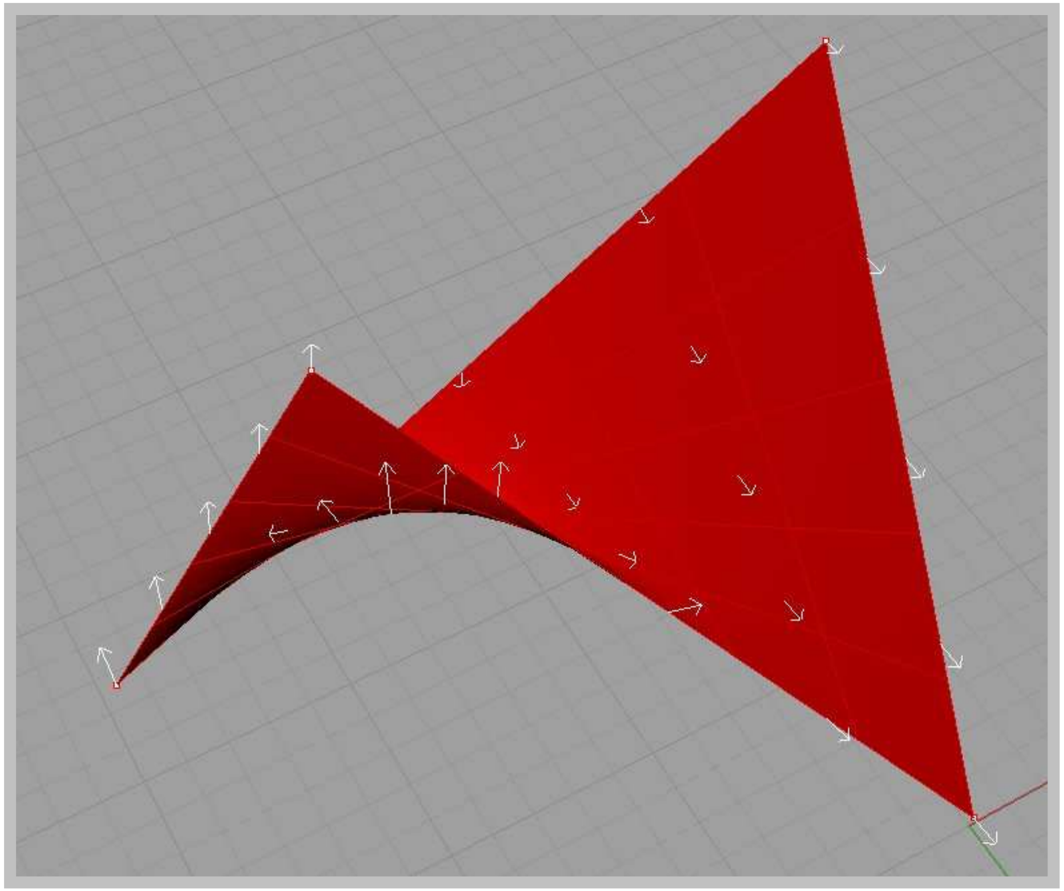
Normála plochy

Normála plochy – přímka kolmá na tečnou rovinu

$$\vec{t} = \left(\frac{\partial x}{\partial u}; \frac{\partial y}{\partial u}; \frac{\partial z}{\partial u} \right)$$

$$\vec{r} = \left(\frac{\partial x}{\partial v}; \frac{\partial y}{\partial v}; \frac{\partial z}{\partial v} \right)$$

$$\vec{n} = \vec{t} \times \vec{r}$$

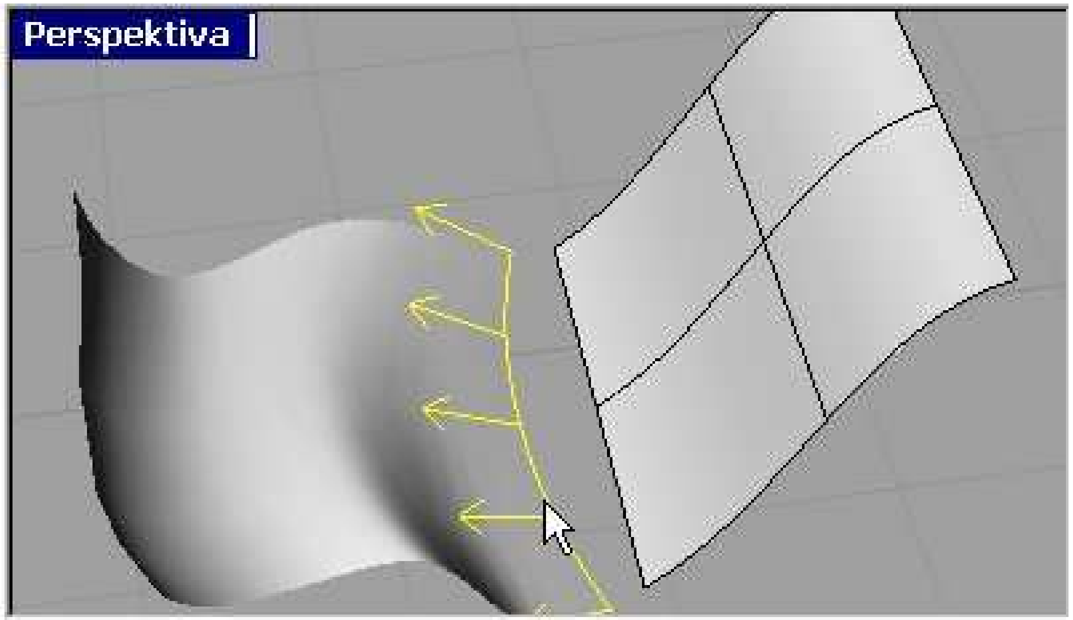


Příčné vektory plochy

Plocha je dána parametricky: $P\ (u,v) = [x(u,v);\ y\ (u,v);\ z\ (u,v)]$

Tečné vektory parametrických *u*-křivek **v bodech okrajové *v*-křivky** plochy nazýváme příčné vektory plátu podél okrajové *v*-křivky.

Tečné vektory parametrických *v*-křivek **v bodech okrajové *u*-křivky** plochy nazýváme příčné vektory plátu podél okrajové *u*-křivky.



První základní forma plochy *P*(*u*,*v*)

Křivka na ploše má parametrické vyjádření $K(t) = \mathrm{P}(u(t), v(t)))$.
Tečný vektor křivky K(t):

$$\frac{dK}{dt} = \frac{\partial P\left(u\left(t\right), v\left(t\right)\right)}{\partial u} \cdot \frac{du\left(t\right)}{dt} + \frac{\partial P\left(u\left(t\right), v\left(t\right)\right)}{\partial v} \cdot \frac{dv\left(t\right)}{dt}$$

První základní forma plochy:

$$\Phi_1 = \frac{dK}{dt} \cdot \frac{dK}{dt} = \frac{\partial P}{\partial u} \cdot \frac{\partial P}{\partial u} \cdot \left(du\right)^2 + 2\frac{\partial P}{\partial u} \cdot \frac{\partial P}{\partial v} \cdot \left(du \cdot dv\right)\frac{\partial P}{\partial v} \cdot \frac{\partial P}{\partial v} \cdot \left(dv\right)^2$$

$$\Phi_1 = E \cdot \left(du\right)^2 + 2F \cdot du \cdot dv + G \cdot \left(dv\right)^2$$

$$E = \frac{\partial P}{\partial u} \bullet \frac{\partial P}{\partial u};\ F = \frac{\partial P}{\partial u} \bullet \frac{\partial P}{\partial v};\ G = \frac{\partial P}{\partial v} \bullet \frac{\partial P}{\partial v}$$

Druhá kvadratická forma plochy *P*(*u*,*v*)

Křivka na ploše nechť je parametrizována obloukem $K(s) = \mathrm{P}(u(s), v(s)))$. Tečný vektor křivky K(s):

$$\frac{dK}{ds} = \frac{\partial P\left(u(s), v(s)\right)}{\partial u} \cdot \frac{du(s)}{ds} + \frac{\partial P\left(u(s), v(s)\right)}{\partial v} \cdot \frac{dv(s)}{ds}$$

$$\frac{d^2K}{ds^2} = \frac{\partial^2 P}{\partial u^2} \cdot \left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 P}{\partial u \partial v} \cdot \frac{du}{ds} \cdot \frac{dv}{ds} + \frac{\partial^2 P}{\partial v^2} \cdot \left(\frac{dv}{ds}\right)^2 + \frac{\partial P}{\partial u} \cdot \frac{d^2u}{ds^2} + \frac{\partial P}{\partial v} \cdot \frac{d^2v}{ds^2} = k \cdot \vec{n}_k$$

Křivost normálového řezu $\vec{n}_k = \vec{n}$

$$k_{norm} = \frac{d^2K}{ds^2} \cdot \vec{n} = \pm \left\{ \frac{\partial^2 P}{\partial u^2} \cdot \vec{n} \cdot \left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 P}{\partial u \partial v} \cdot \vec{n} \cdot \frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + \frac{\partial^2 P}{\partial v^2} \cdot \vec{n} \cdot \left(\frac{dv}{ds}\right)^2 \right.$$

Druhá základní forma plochy:

$$\Phi_2 = L \cdot du^2 + 2M \cdot du \cdot dv + N \cdot dv^2$$

$$L = \frac{\partial^2 P}{\partial u^2} \cdot \vec{n};\ M = \frac{\partial^2 P}{\partial u \cdot \partial v} \cdot \vec{n};\ N = \frac{\partial^2 P}{\partial v^2} \cdot \vec{n};$$

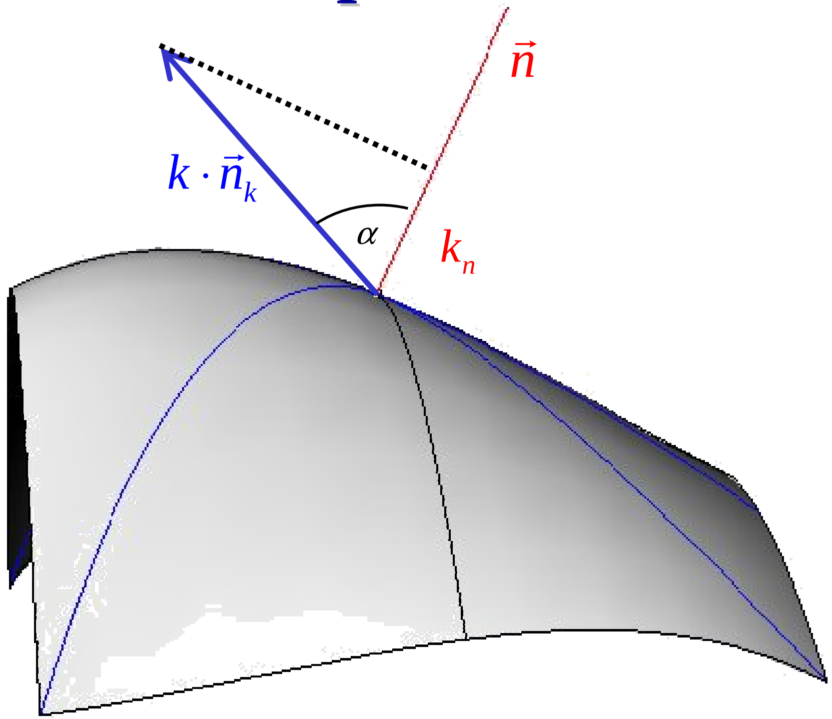
Normálová křivost křivek na ploše

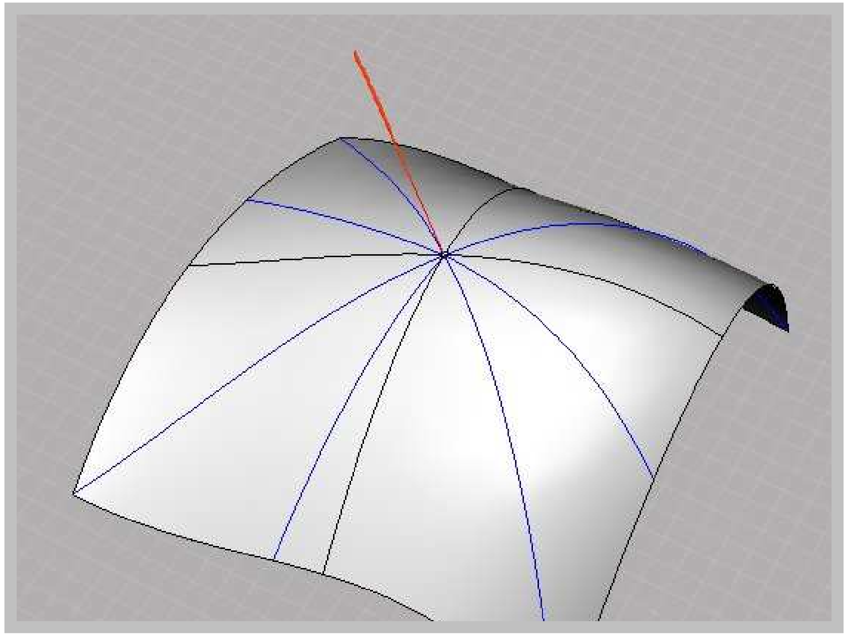
$k_n = k \cdot \vec{n}_k \cdot \vec{n} = k \cdot \cos\alpha$

$\vec{n}$....normála plochy

$\vec{n}_k$...hlavní normála křivky

k.....křivost křivky



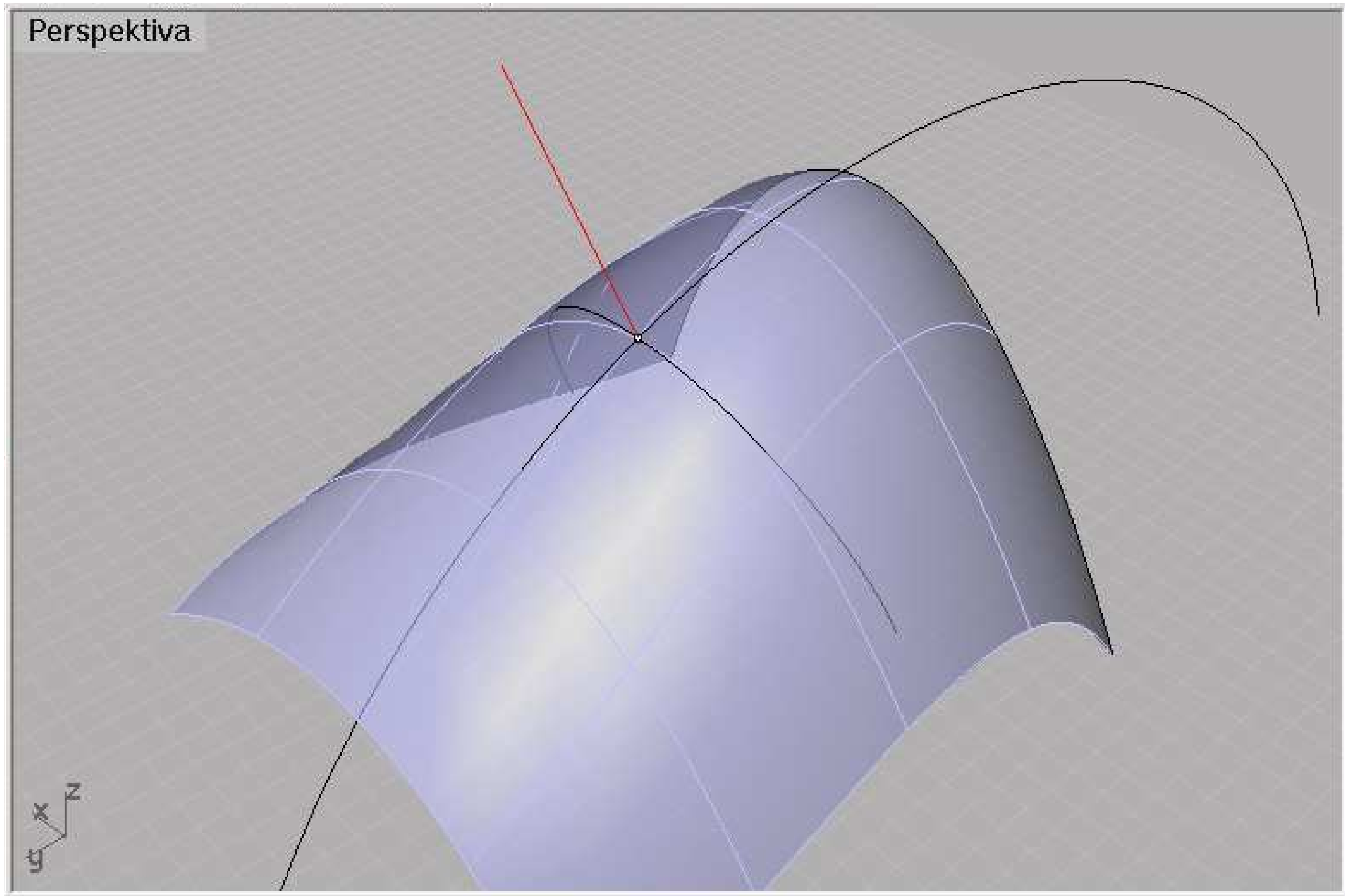


Normálová křivost všech křivek na ploše, které se v bodě plochy dotýkají společné tečny je stejná

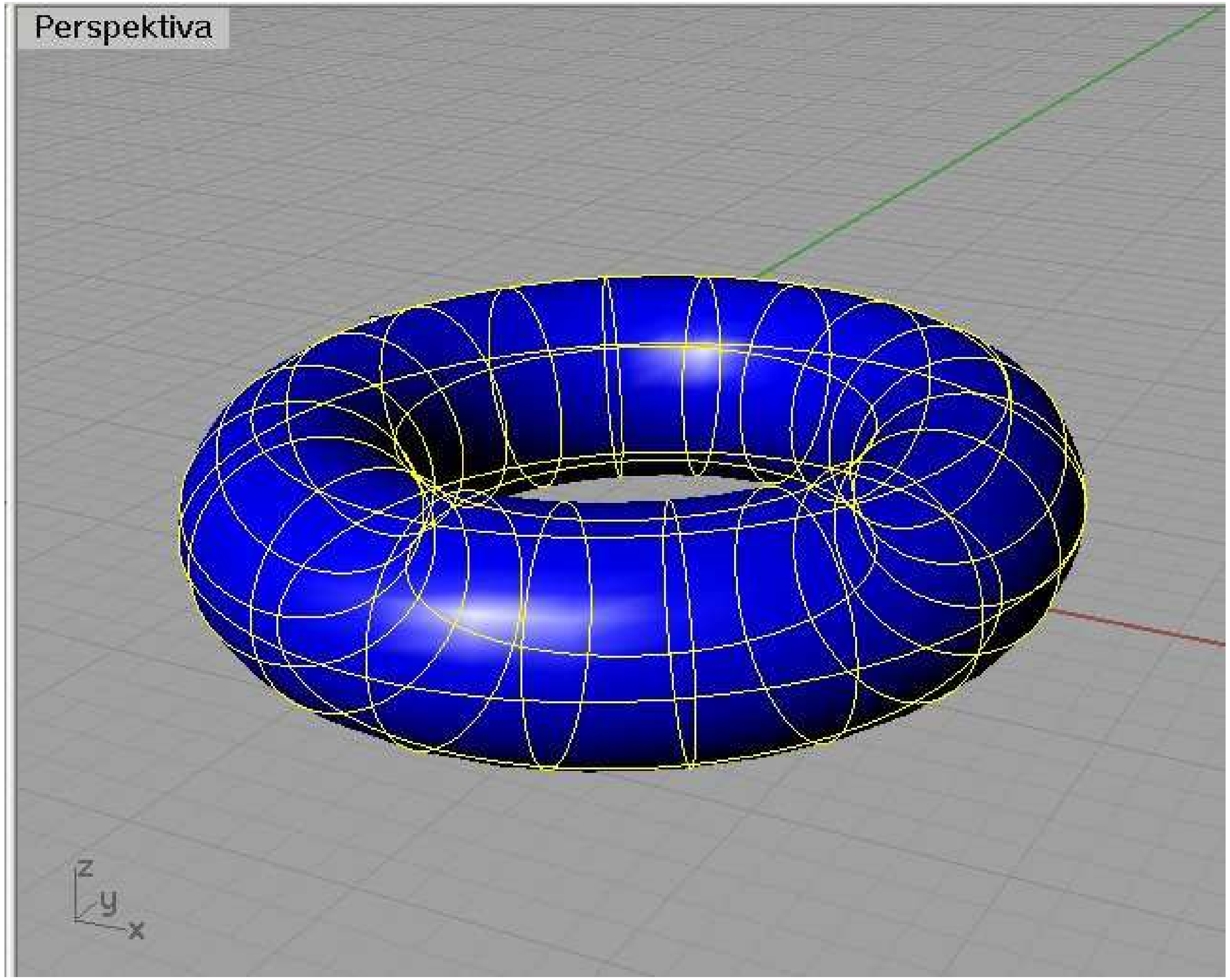
$$k_n = \frac{\Phi_2}{\Phi_1}$$

Hlavní směry plochy

= Směry, ve kterých normálová křivost nabývá extrémálních hodnot



Hlavní křivky plochy- křivoznačné čáry



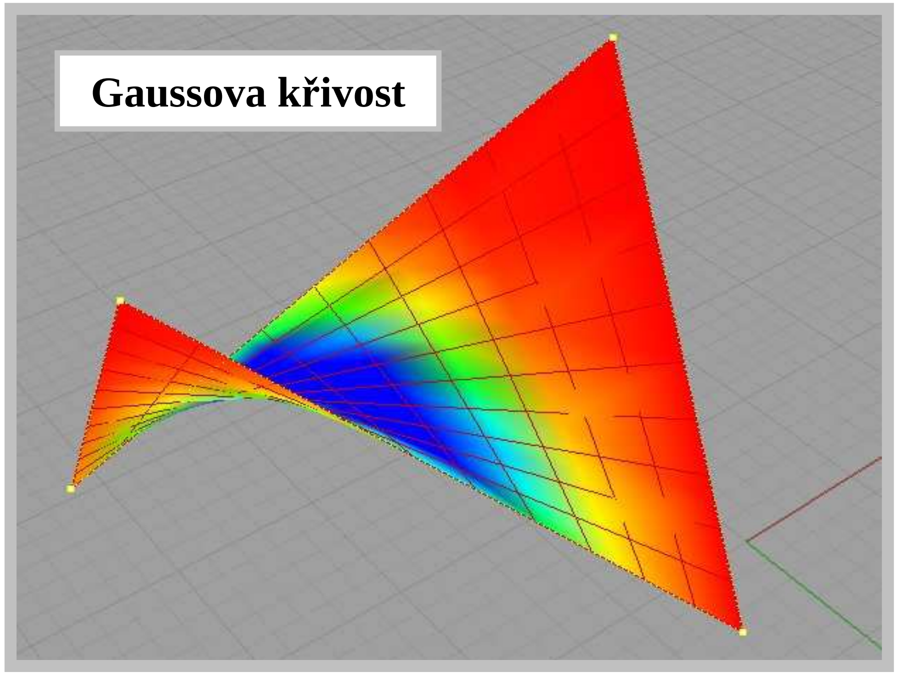
Křivosti plochy

k_1, k_2 ….. extrémální normálové křivosti plochy.

$$G = k_1 \cdot k_2 = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}$$ Gaussova křivost

$$H = \frac{k_1 + k_2}{2} = \frac{NE - 2MF + LG}{2\left(EG - F^2\right)}$$ Střední křivost

$$\mathrm{K}_{\mathrm{abs}} = |k_1| + |k_2|$$ Absolutní křivost

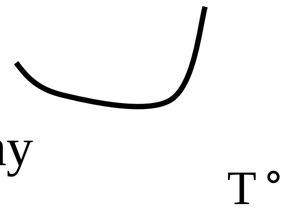


Klasifikace bodů na ploše

Bod T nazýváme :

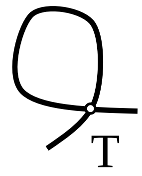
- **Eliptický G>0**

  bod T j eizolovaný (nebo jediný) bod průnikové křivky plochy a tečné roviny



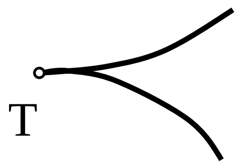
- **Hyperbolický G<0**

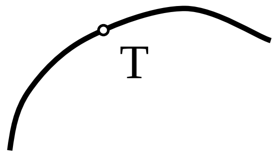
  bod T je uzlovým bodem průnikové křivky plochy a tečné roviny



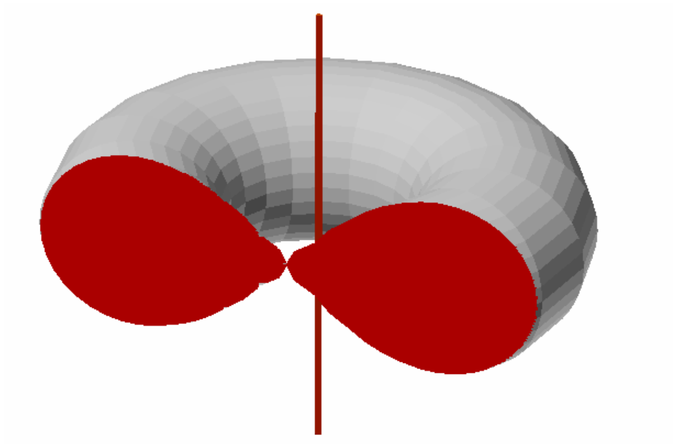
- **Parabolický G=0**

  bod T je regu ostatních případech

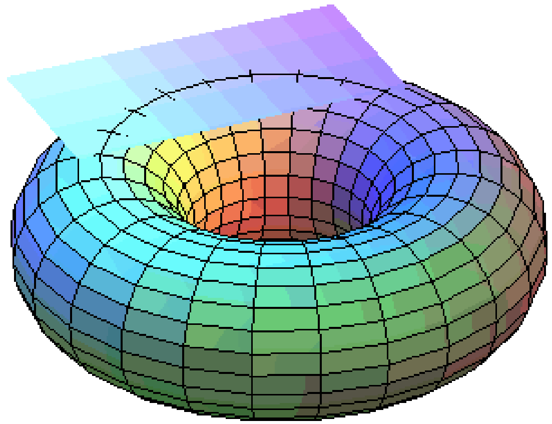




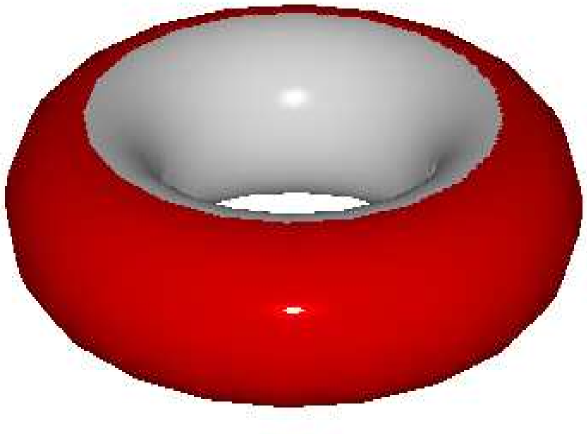
Řez anuloidu tečnou rovinou v hyperbolickém bodě



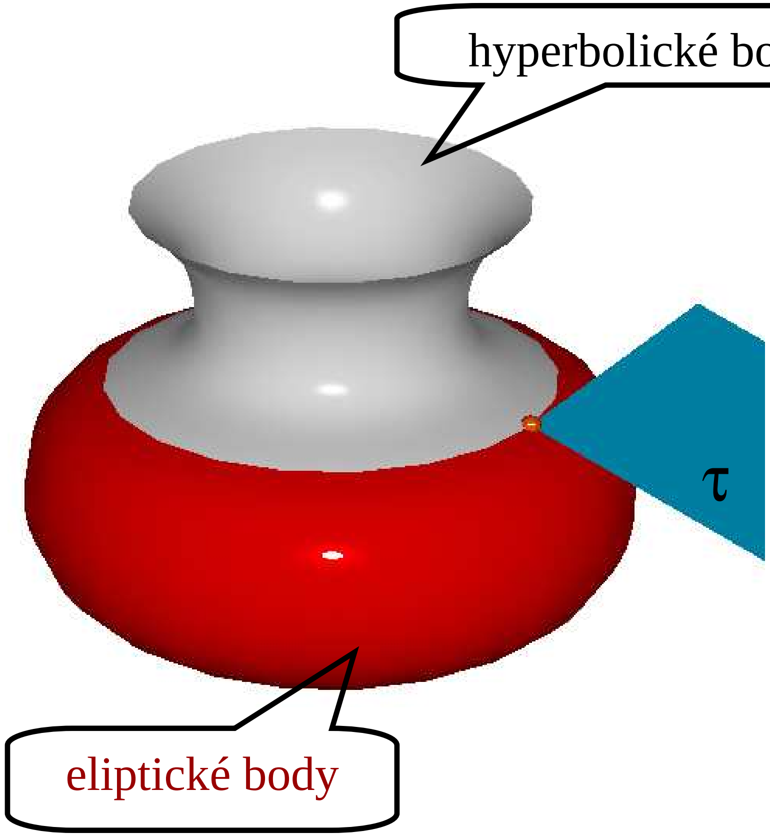
Řez anuloidu tečnou rovinou v parabolickém bodě



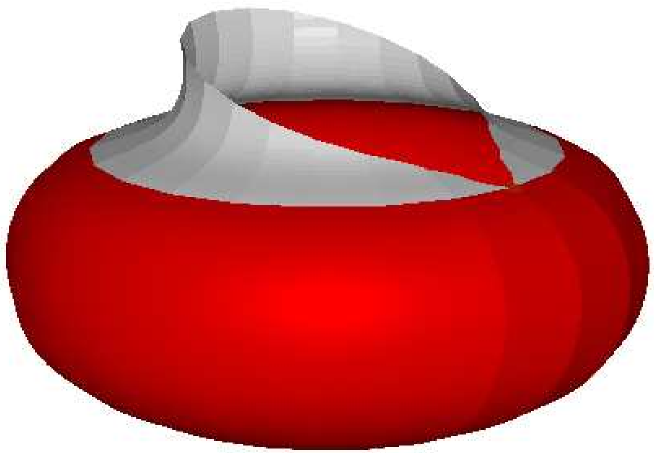
Eliptické a hyperbolické body na anuloidu



Množina eliptických a hyperbolických bodů na ploše je oddělena křivkou parabolických bodů.



Řez tečnou rovinou τ
v parabolickém bodě



Theorema egregium

Dvě plochy lze na sebe vzájemně rozvinout právě tehdy, mají-li v odpovídajících si bodech tutéž Gaussovu křivost.