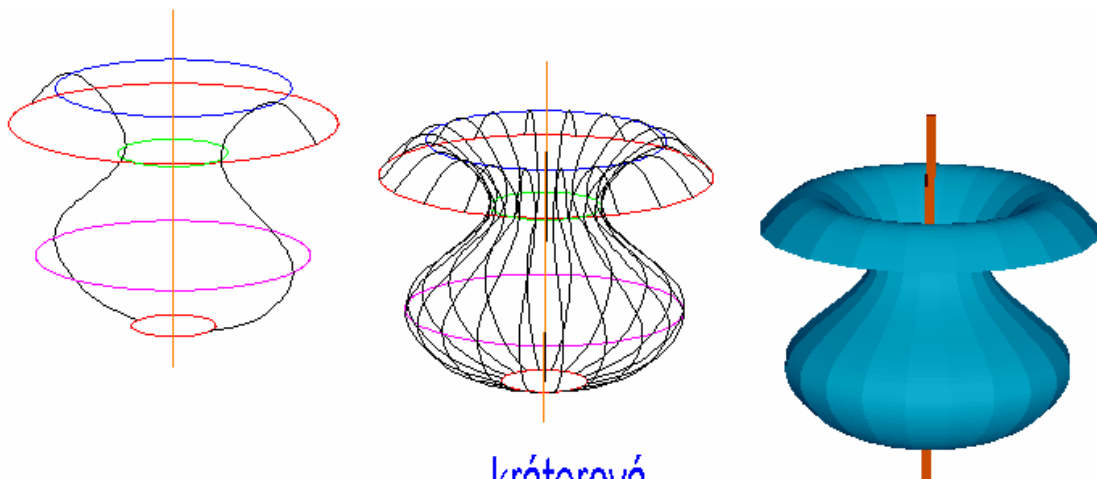


Plochy počítačové grafiky

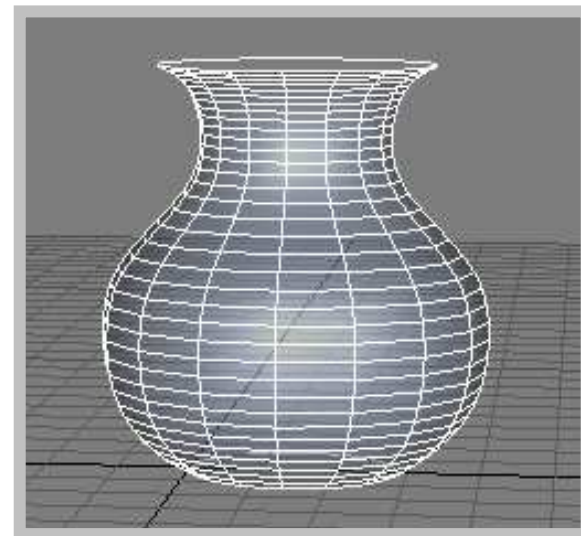
Plochy vzniklé:

rotací (Revolve), šroubovým pohybem (Screw), vytažením (Extrude), šablonování křivky po trase (Sweep), potažením (Loft)

Rotační plochy (Revolve, Lathe)



rovnoběžkové kružnice :
kráterová
hraniční
hrdelní
rovníková



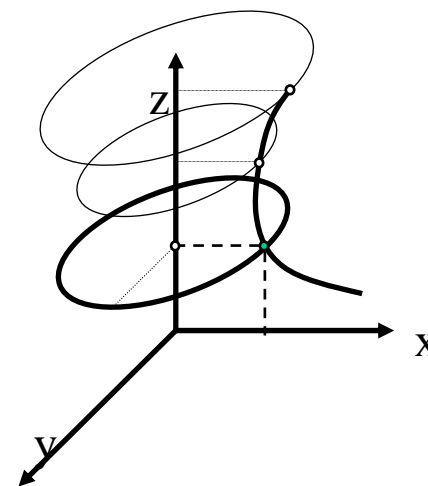
Parametrické vyjádření rotační plochy

- Plocha vznikne rotací tvořící křivky k kolem osy. Necht' je osou rotace souřadnicová osa z , tvořící křivkou je meridián k v souřadnicové rovině (x,z) .

Křivka je dána parametricky: $k(t) = [x(t), 0, z(t)]$

- Parametrické vyjádření rotační plochy $P(t,\alpha)$:

$$P(t,\alpha) = [x(t) \cdot \cos \alpha, x(t) \cdot \sin \alpha, z(t)]$$



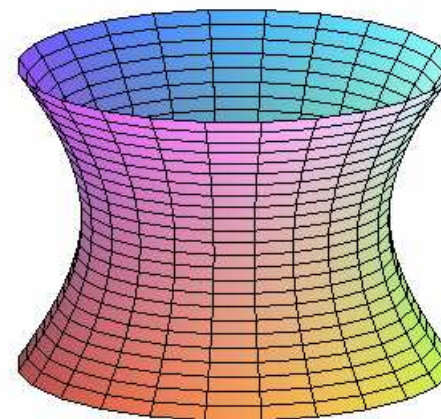
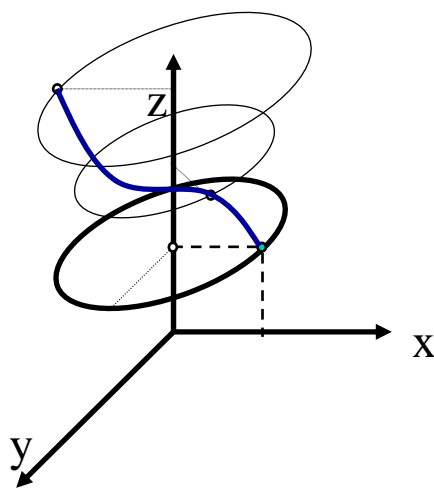
Parametrické vyjádření rotační plochy

- Křivka je dána parametricky:

$$k(t) = [x(t), y(t), z(t)]$$

- Parametrické vyjádření rotační plochy $P(t, \alpha)$:

$$P(t, \alpha) = \left[\sqrt{x^2(t) + y^2(t)} \cdot \cos \alpha, \sqrt{x^2(t) + y^2(t)} \cdot \sin \alpha, z(t) \right]$$



Parametrické vyjádření rotační plochy maticí rotace

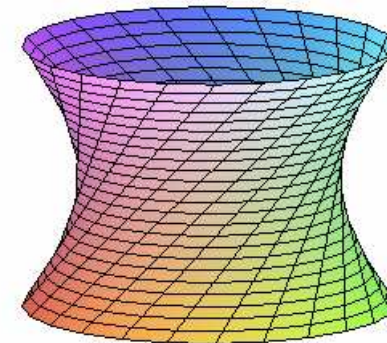
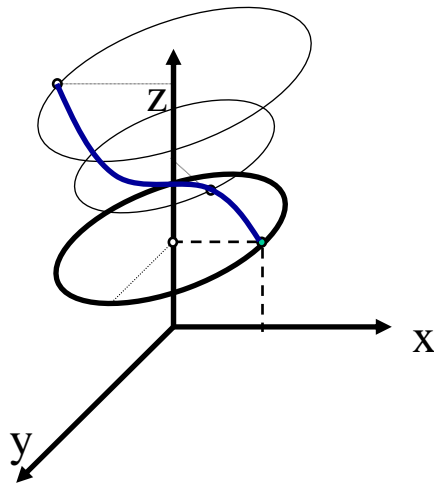
- Křivka je dána parametricky:

$$k(t) = [x(t), y(t), z(t)]$$

- Parametrické vyjádření rotační plochy $P(t, \alpha)$ vzniklé rotací plochy kolem souřadnicové osy z .

$$P(t, \alpha) = R \cdot k(t)$$

$$R := \begin{bmatrix} \cos(t) & \sin(t) & 0 \\ -\sin(t) & \cos(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Parametrické vyjádření šroubové plochy

- Plocha vznikne šroubovým pohybem tvořící křivky k , osou šroubového pohybu necht' je souřadnicová osa z , tvořící křivkou je meridián m v souřadnicové rovině (x,z) .

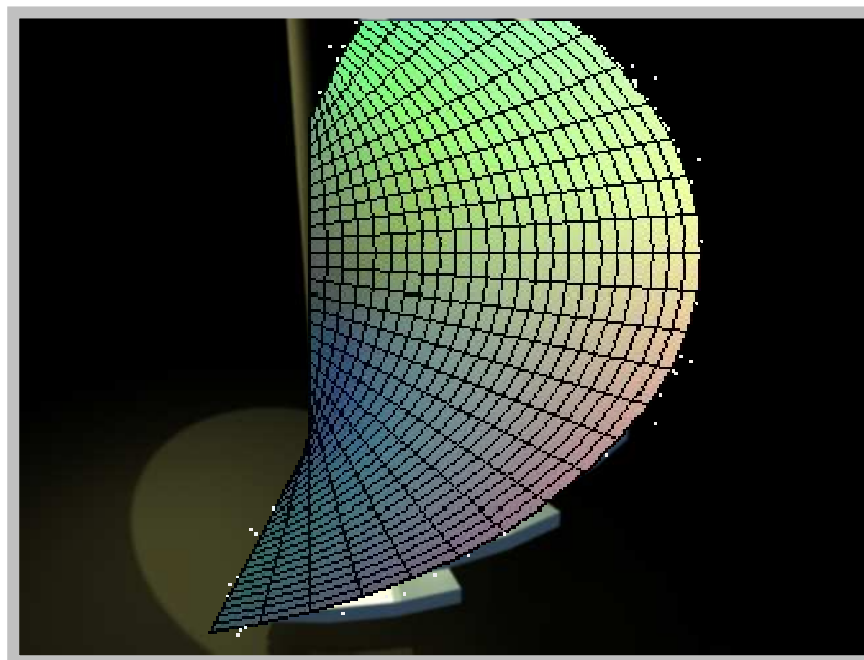
$$m(t) = [x(t), 0, z(t)]$$

- Parametrické vyjádření šroubové plochy:

$$x = x(t) \cdot \cos \alpha$$

$$y = x(t) \cdot \sin \alpha$$

$$z = z(t) + v_0 t, t, \alpha \in R$$



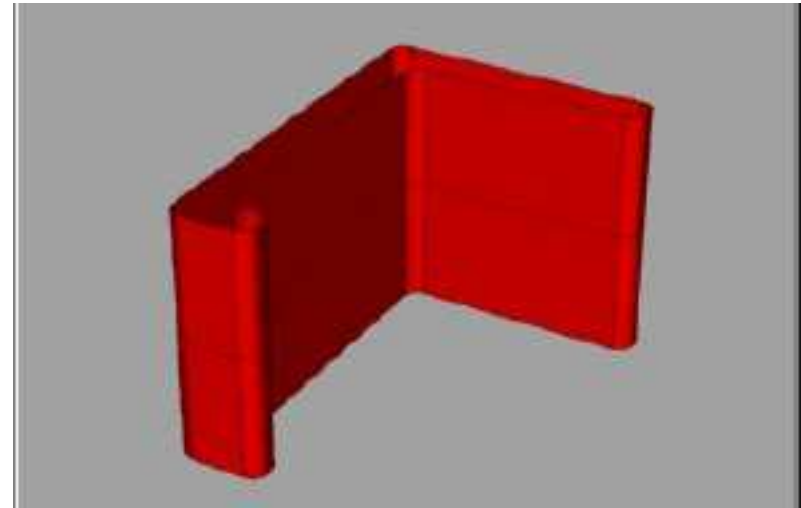
Vytvoření plochy vytažením - Extrude

1. Profil – křivka daná parametricky

$$K(t) = [x(t), y(t), 0]$$

kolmá válcová plocha

$$P(t, v) = [x(t), y(t), v]$$



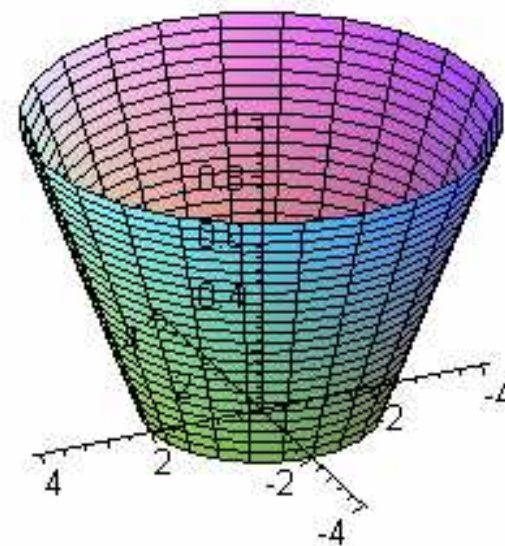
2. Plocha je dána prostorovou křivkou $K(t)$ a směrovým vektorem površek u
obecné válcové plochy

$$P(t, v) = K(t) + v \cdot \vec{u}$$

Vytažení se změnou velikosti profilu

- Necht' je v lokálním souřadnicovém systému dána tvořící křivka (profil) $K(t) = [x(t), y(t), 0]$ Plocha vznikne vytažením v kolmém směru a současným zvětšováním (zmenšováním) kružnice. Zvětšení je přímo úměrné vytažení s koeficient úměrnosti m .

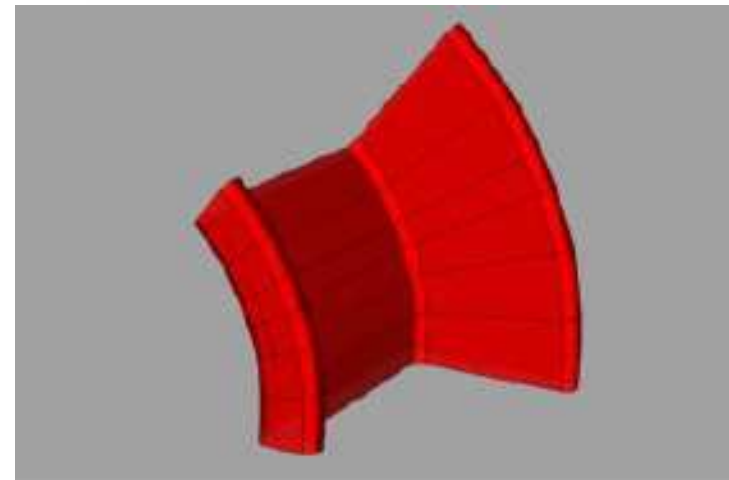
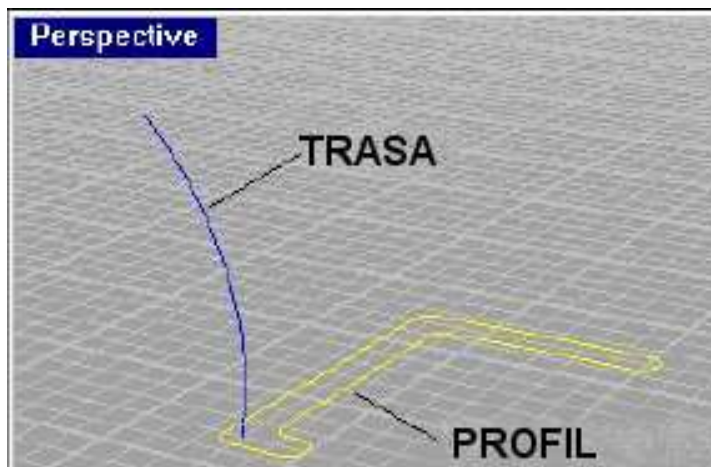
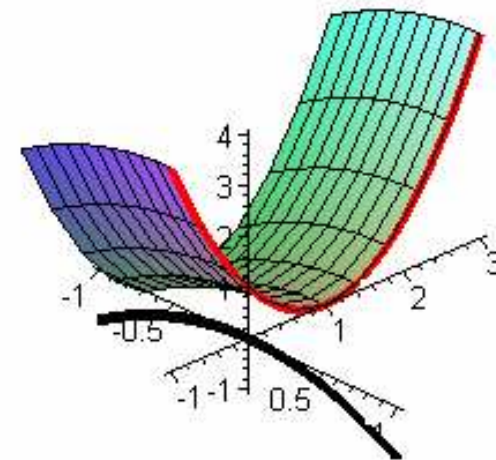
$$P(t, v) = [mv \cdot x(t), mv \cdot y(t), v]; v \in \langle 1, h \rangle, t \in \langle 0, 2\pi \rangle$$



Šablonování křivky po trase – Sweep Translační plocha

- Profil $k_1(u)$
- Trasa $k_2(v)$

$$P(u, v) = k_1(u) + k_2(v)$$



Šablonování křivky po trase – Sweep Translační plocha

- Profil $k_1(u) = [x(u), y(u), 0]$
- Trasa $k_2(v)$

Frenetův trojhran trasovací křivky $\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}$

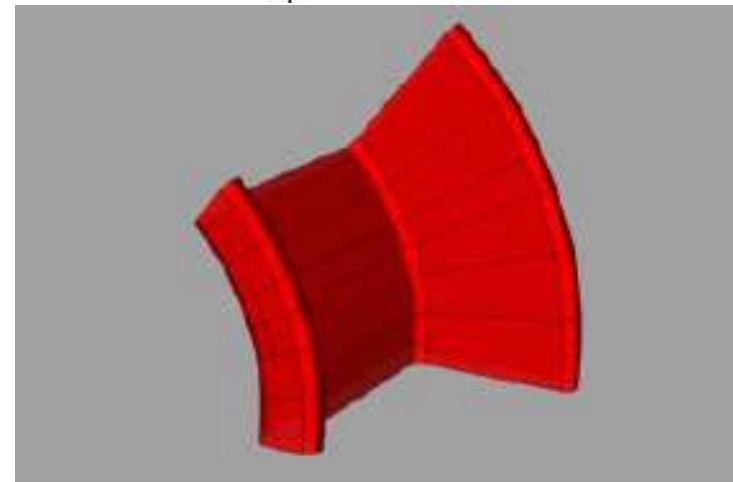
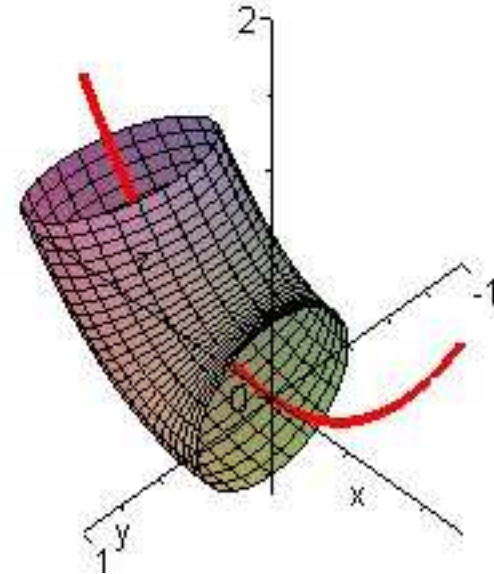
Matice natočení $G(v) = (\vec{b}(v), \vec{n}(v), \vec{t}(v))$

$$\vec{e}_3 \rightarrow \vec{t}$$

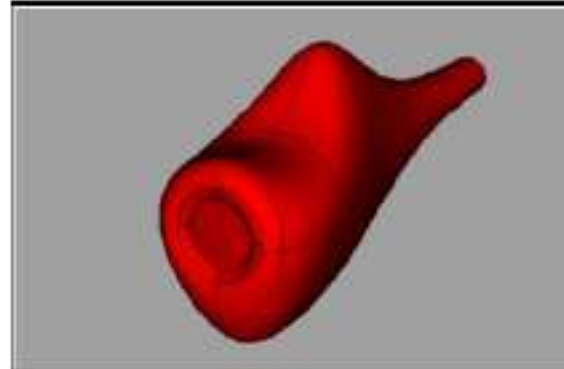
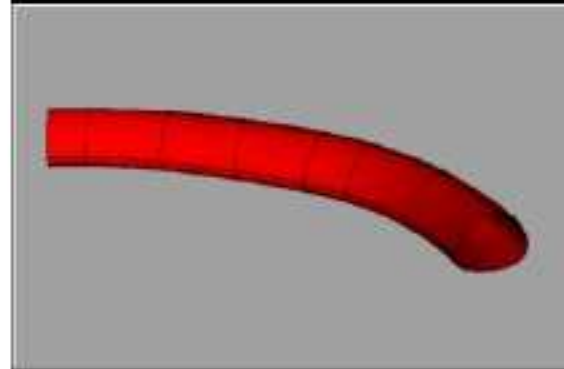
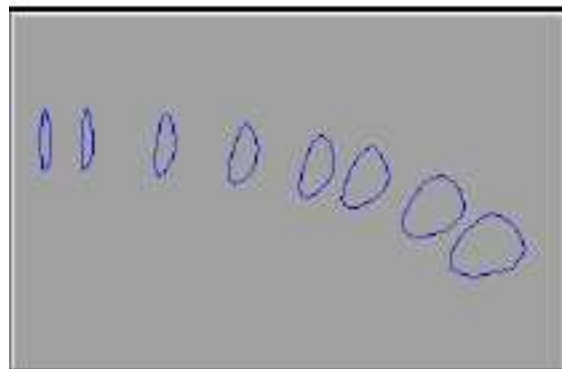
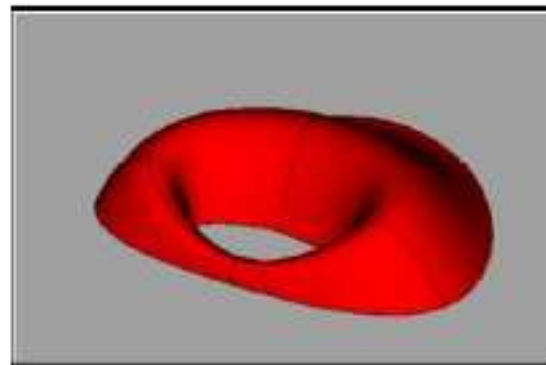
$$\vec{e}_2 \rightarrow \vec{n}$$

$$\vec{e}_1 \rightarrow \vec{b}$$

$$P(u, v) = G(v) \cdot k_1(u) + k_2(v)$$



Vytvoření plochy potažením - Loft



Vytvoření plochy potažením – Přímkové plochy

Lineární plát

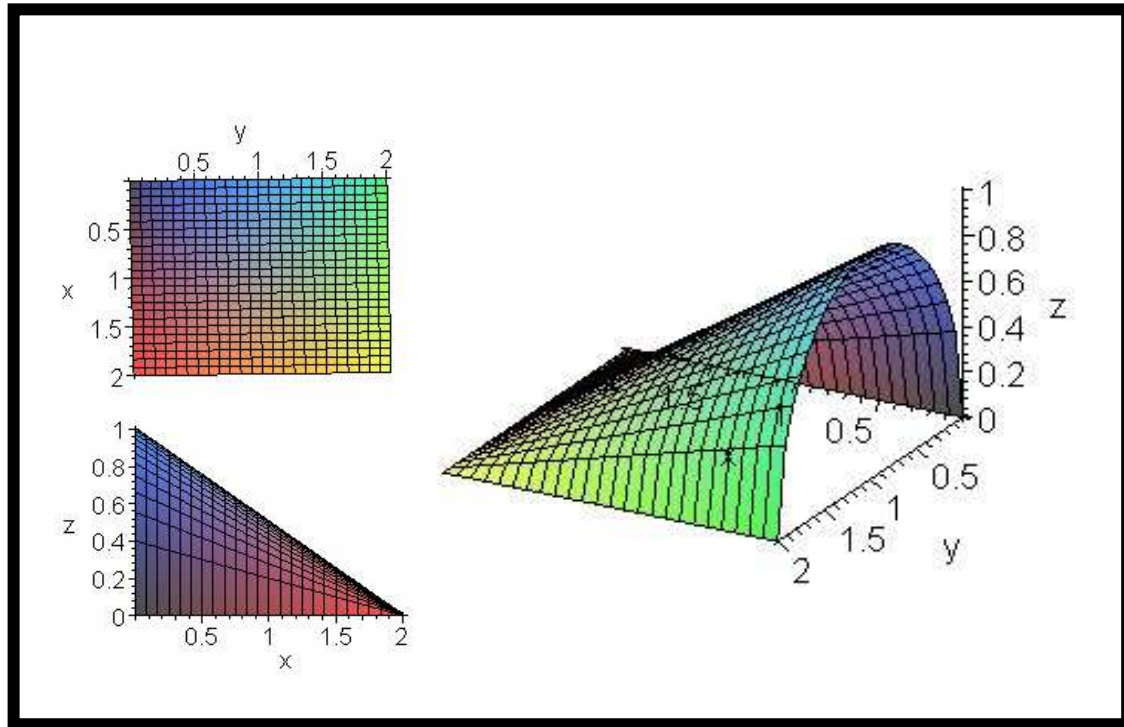
$$X(u, v) = (1 - u) \cdot a0(v) + u \cdot a1(v)$$

Příklad:

$$a0 := [0, v, \sqrt{-v^2 + 2v}]$$

$$a1 := [2, v, 0]$$

$$plocha := [2u, v, -(-1 + u) \sqrt{-v(v - 2)}]$$

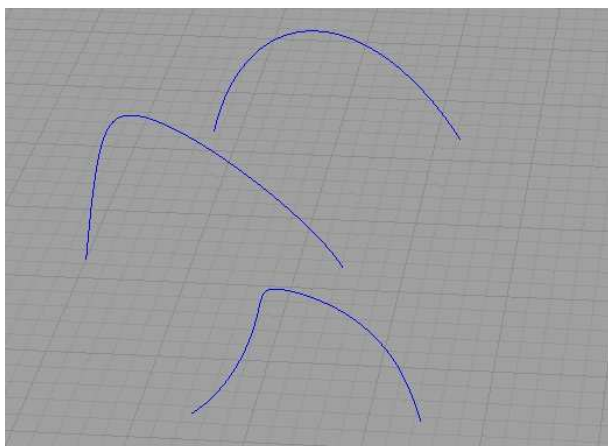


Vytvoření plochy potažením – Přímkové plochy

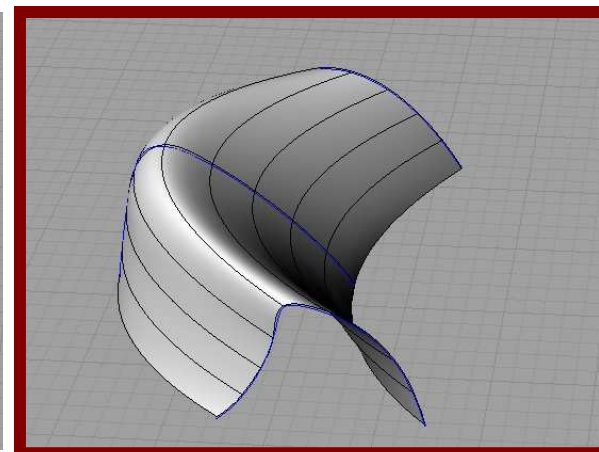
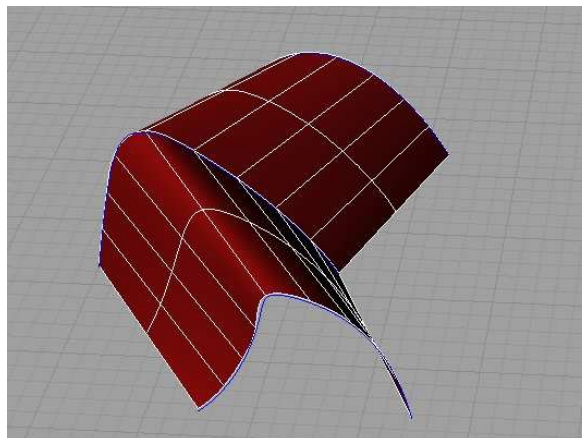
Lineární plát

$$X(u, v) = (1 - u) \cdot a0(v) + u \cdot a1(v)$$

Lineární plát



Hermitovský plát



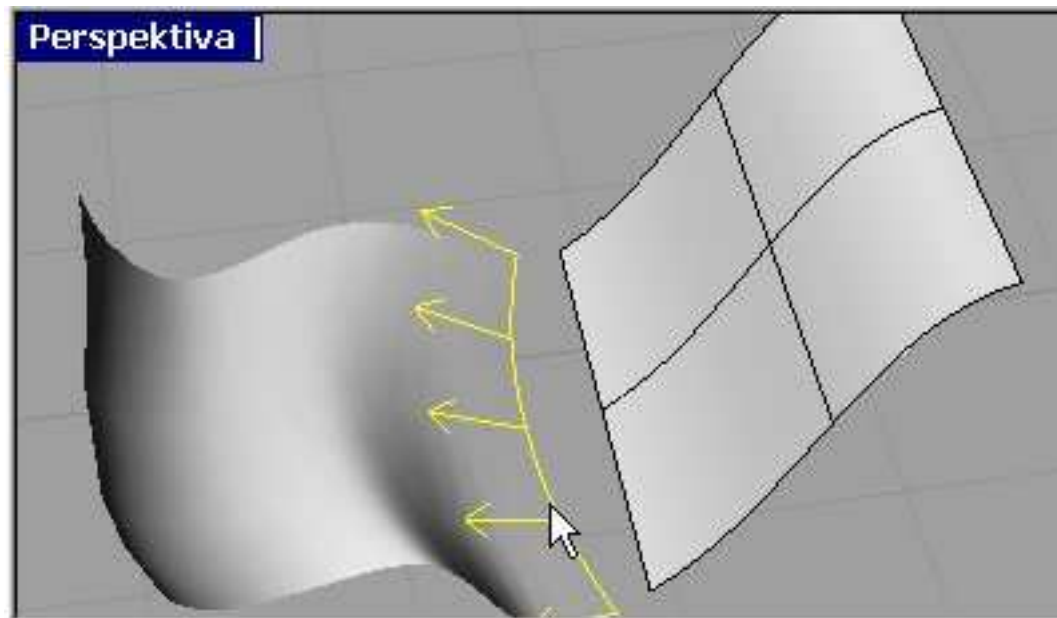
Příčné tečné vektory

- Směrové vektory tečen v - křivky sestrojené podél okrajové u -křivky.

$$P_0(v) = \frac{\partial P(u,v)}{\partial u}(u=0,v); P_1(v) = \frac{\partial P(u,v)}{\partial u}(u=1,v);$$

Směrové vektory tečen v - křivky sestrojené podél okrajové u -křivky

$$P_0(u) = \frac{\partial P(u,v)}{\partial v}(u,v=0); P_1(u) = \frac{\partial P(u,v)}{\partial v}(u,v=1);$$



Vytvoření plochy potažením Hermitovský plát

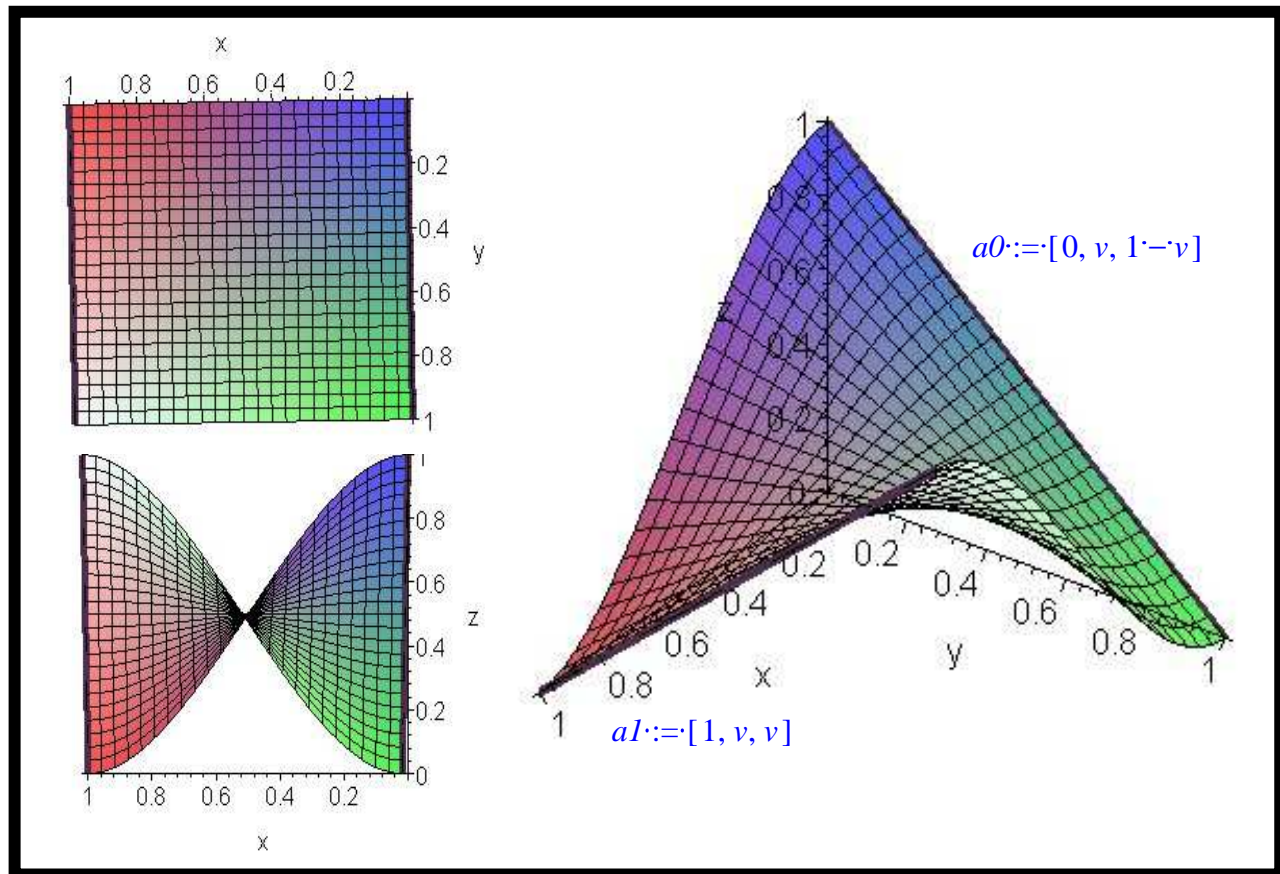
$$X(t, v) = F0(t) \cdot a0(v) + F1(t) \cdot a1(v) + \tilde{F}0(t) \cdot P_0(v) + \tilde{F}1(t) \cdot P_1(v)$$

$$F0 = 2t^3 - 3t^2 + 1$$

$$F1 = -2t^3 + 3t^2$$

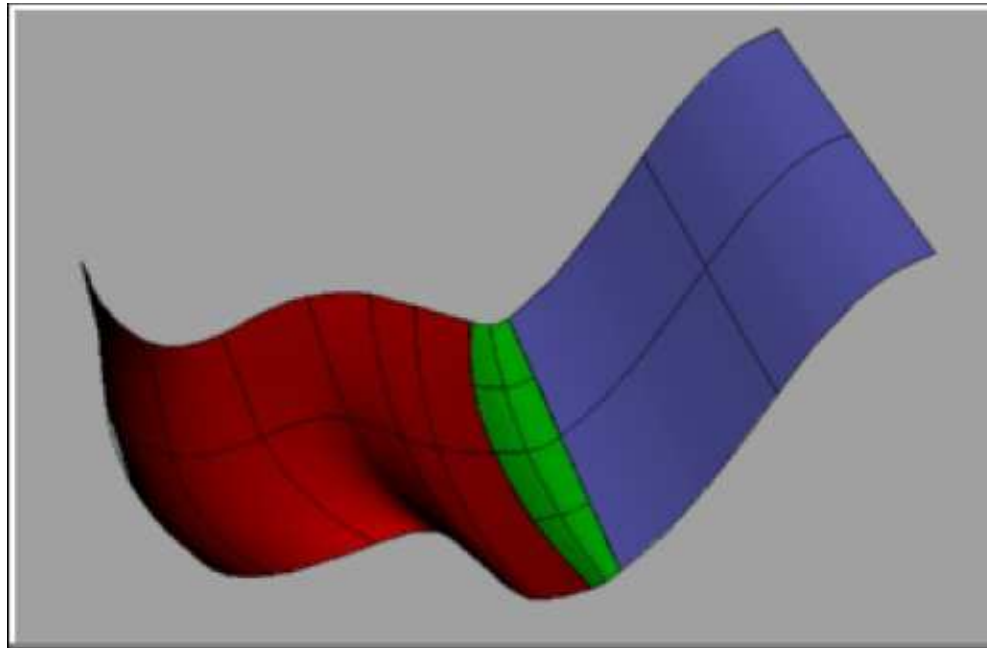
$$\tilde{F}0 = t^3 - 2t^2 + t$$

$$\tilde{F}1 = t^3 - t^2$$



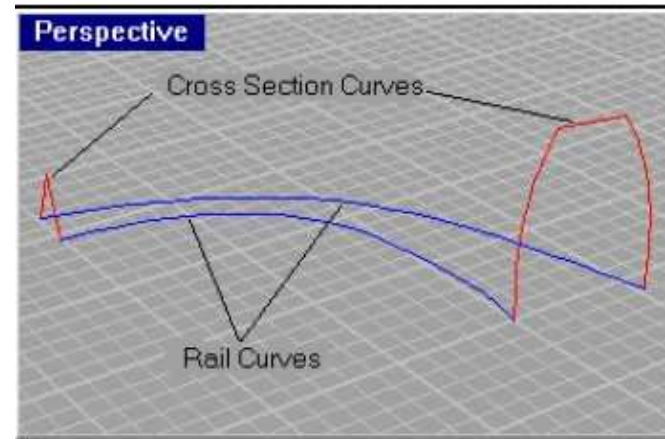
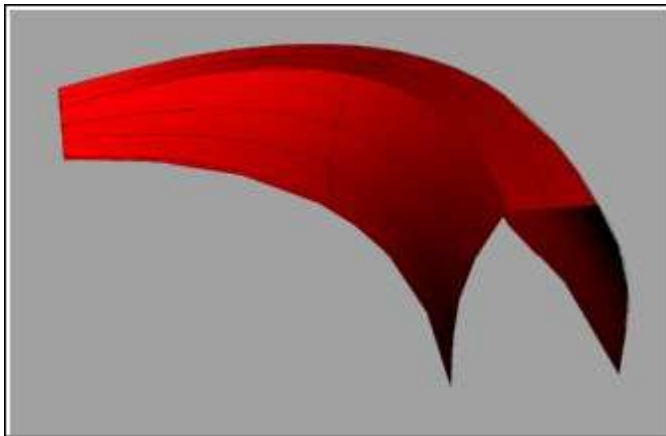
Plynulý přechod mezi plochami - Blend

- Plocha spojující dva dané pláty je určena okrajovými křivkami a příčnými tečnými vektory-Hermitovský plát



Šablonování křivky po dvou trasách (Sweep 2 rails)

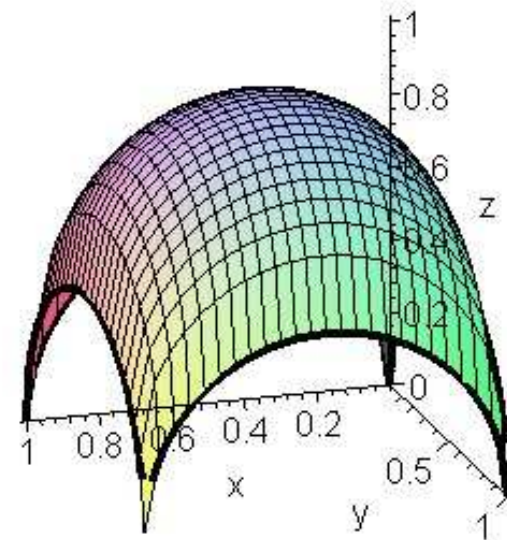
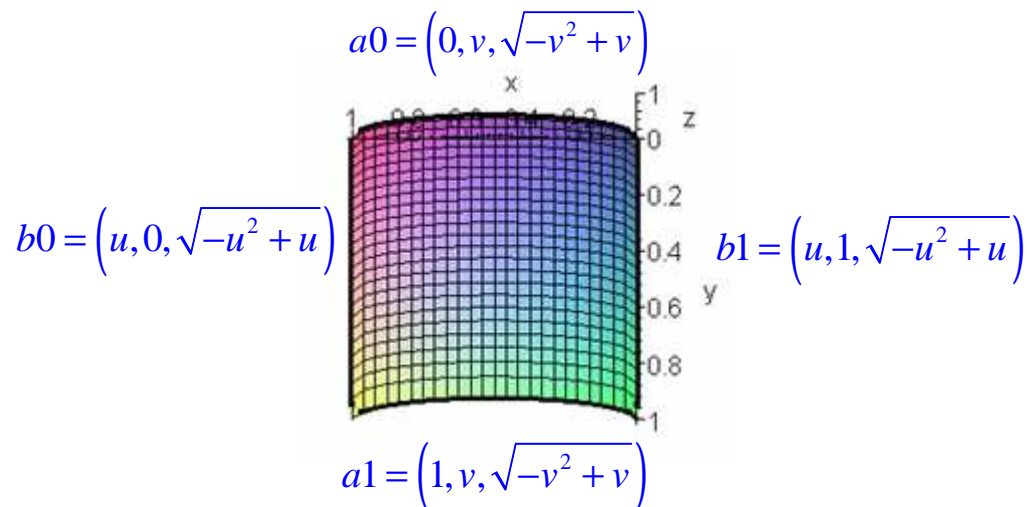
Plocha je dána 4 hraničními křivkami



Bilineární plát

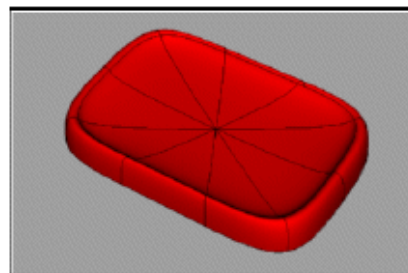
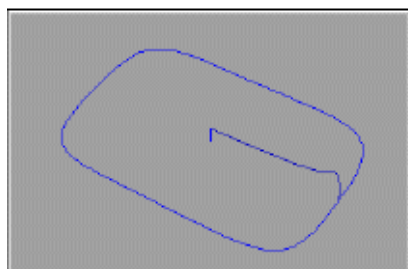
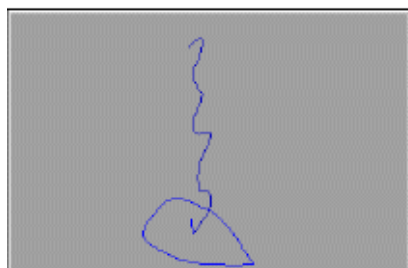
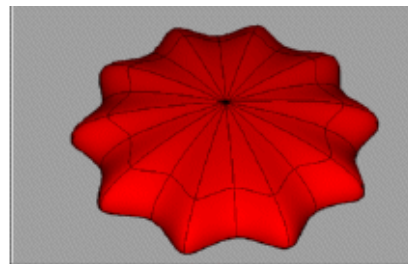
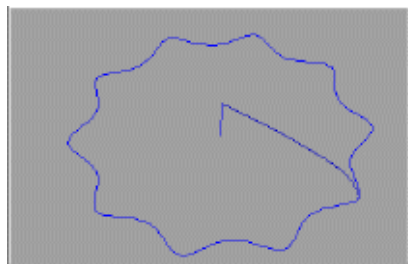
$$0 = (1-u, -1, u) \cdot M \cdot (1-v, -1, v)^T$$

$$M := \begin{bmatrix} p00 & a0(v) & p01 \\ b0(u) & X(u, v) & b1(u) \\ p10 & a1(v) & p11 \end{bmatrix}$$



$$plat := [u, v, \sqrt{-u^2 + u} + \sqrt{-v^2 + v}]$$

Rotace profilu po křivce (Rail Revolve)

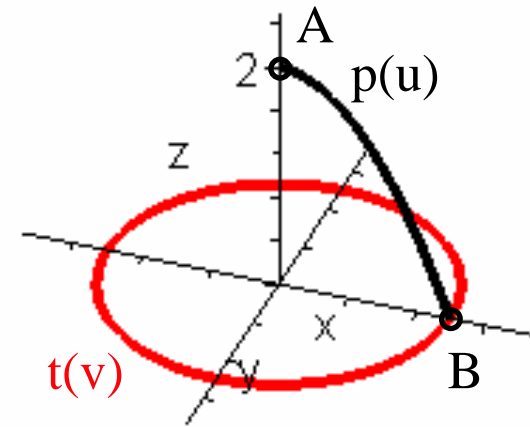


Rotace profilu po trase jako bilineární plát

$$0 = (1-u, -1, u) \cdot M \cdot (1-v, -1, v)^T$$

$$M = \begin{pmatrix} A & A & A \\ p(u) & X(u, v) & p(u) \\ B & t(v) & B \end{pmatrix}$$

$$X(u, v) = p(u) + u(t(v) - B)$$

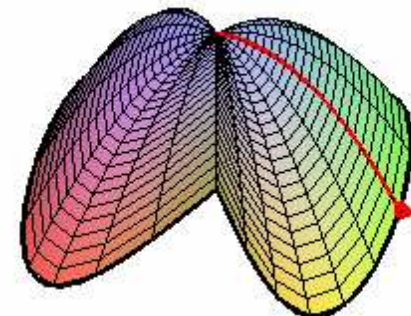


Př: plocha vytvořená rotačním tažením křivky po trase

$$p(u) = [0, u, -u^2 + 1]$$

$$t(v) = [\sin 2v, \cos v, 0]$$

$$B = [0, 1, 0]$$



Bikubický plát

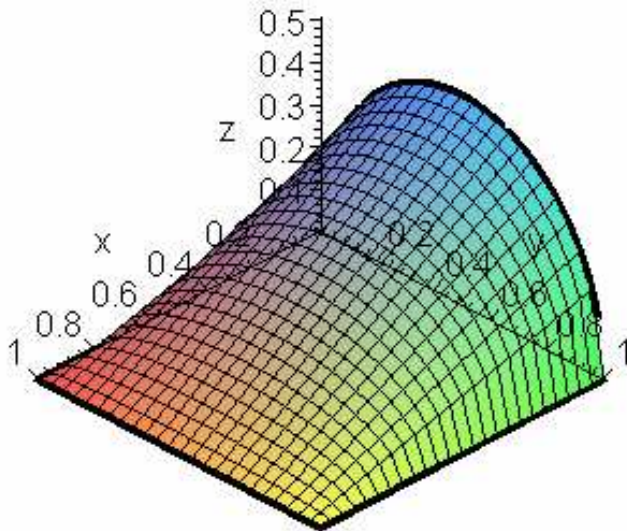
$$0 = (F_0(u), -1, F_1(u)) \cdot M \cdot (F_0(v), -1, F_1(v))^T$$

$$F_0(t) = 2t^3 - 3t^2 + 1$$

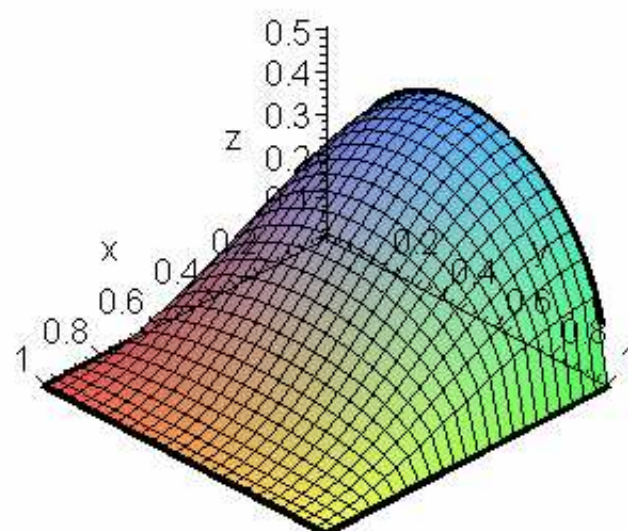
$$F_1(t) = -2t^3 + 3t^2$$

$$M := \begin{bmatrix} p00 & a0(v) & p01 \\ b0(u) & X(u, v) & b1(u) \\ p10 & a1(v) & p11 \end{bmatrix}$$

Bilineární plát



Bikubický plát



Obecná bikubická plocha

$$\begin{bmatrix} F_3(u) \\ F_1(u) \\ -1 \\ F_2(u) \\ F_4(u) \end{bmatrix} C \cdot \begin{bmatrix} F_3(v) \\ F_1(v) \\ -1 \\ F_2(v) \\ F_4(v) \end{bmatrix}^T = 0$$

$$C = \begin{bmatrix} T_{00} & P_{00}^u & P_{0v}^u & P_{01}^u & T_{01} \\ P_{00}^v & P_{00} & P_{0v} & P_{01} & P_{01}^v \\ P_{u0}^v & P_{u0} & P(u, v) & P_{u1} & P_{u1}^v \\ P_{10}^v & P_{10} & P_{1v} & P_{11} & P_{11}^v \\ T_{10} & P_{10}^u & P_{1v}^u & P_{11}^u & T_{11} \end{bmatrix}$$

Hermitovské polynomy:

$$F_1(t) = 2t^3 - 3t^2 + 1$$

$$F_2(t) = -2t^3 + 3t^2$$

$$F_3(t) = t^3 - 2t^2 + t$$

$$F_4(t) = t^3 - t^2$$

12-ti vektorový plát

Hermite, Fergusson

$$P(u, v) =$$

$$[F_3(u), F_1(u), F_2(u), F_4(u)] \cdot G \cdot [F_3(v), F_1(v), F_2(v), F_4(v)]^T$$

$$G = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial u} P(0,0) & \frac{\partial}{\partial u} P(0,1) & 0 \\ \frac{\partial}{\partial v} P(0,0) & P(0,0) & P(0,1) & \frac{\partial}{\partial v} P(0,1) \\ \frac{\partial}{\partial v} P(1,0) & P(1,0) & P(1,1) & \frac{\partial}{\partial v} P(1,1) \\ 0 & \frac{\partial}{\partial u} P(1,0) & \frac{\partial}{\partial u} P(1,1) & 0 \end{bmatrix}$$

16-ti vektorový plát se zkruty

Barsky (Hermitovská interpolace)

$$P(u, v) =$$

$$[F_3(u), F_1(u), F_2(u), F_4(u)] \cdot G \cdot [F_3(v), F_1(v), F_2(v), F_4(v)]^T$$

$$G = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} P(0,0) & \frac{\partial}{\partial u} P(0,0) & \frac{\partial}{\partial u} P(0,1) & \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} P(0,1) \\ \frac{\partial}{\partial v} P(0,0) & P(0,0) & P(0,1) & \frac{\partial}{\partial v} P(0,1) \\ \frac{\partial}{\partial v} P(1,0) & P(1,0) & P(1,1) & \frac{\partial}{\partial v} P(1,1) \\ \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} P(1,0) & \frac{\partial}{\partial u} P(1,0) & \frac{\partial}{\partial u} P(1,1) & \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} P(1,1) \end{bmatrix}$$

zkrutové
vektory

16-ti vektorový plát se zkruty

