Nalezený tok je tokem maximálním, hodnota toku je $y_{max} = 2+1+2 = 5 = y_z = (5-0)+0 = 5 = y_u = (2-0)+(3-0) = 5$

3.2 *Maximální tok v prostorové síti*

Prostorová síť obsahuje hrany, které se protínají mimo uzly a nelze ji zakreslit tak, aby k protnutí nedošlo.

Ve všeobecné dopravní síti definujeme tyto pojmy:

2

- řezová množina (řez dopravní sítě)
- kapacita řezové množiny

Množina hran dopravní sítě $Y_R \subset Y$ je řezovou množinou danou množinou $R \subset V, z \in R \wedge u \notin R$, pokud pro každou orientovanou hranu $h \in Y_R$ s incidencí $p[h] = [v, w]$ platí: $v \in R \wedge w \notin R$

Kapacita řezové množiny je rovna součtu ohodnocených hran obsažených v řezové množině: $c[Y_R] = \sum_{h \in Y_R} c[h]$

Pro tok v síti platí: $y_z \leq c[Y_R]$, kde Y_R je libovolná řezová množina.

Pro maximální tok v dopravní síti platí Ford-Fulkersonova věta: maximální tok se rovná minimální řezové propustnosti: $y_{max} = \min_{Y_R}\{c[Y_R]\}$

Měli bychom prohledat všechny řezové množiny, určit jejich kapacitu a vybrat tu minimální (tato kapacita je hodnotou max. toku). Pro reálné sítě není tento postup reálný, proto byl navržen Ford-Fulkersonův algoritmus (značkovací metoda), umožňující výpočet max. toku.

Ford-Fulkersonův algoritmus:

1.krok: Sestrojíme libovolný úplný tok

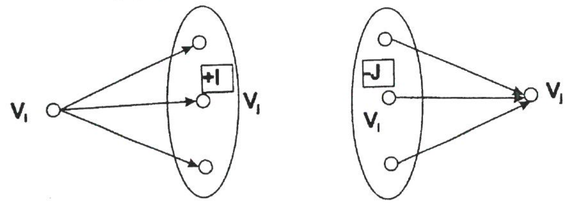
2.krok: Musíme zjistit, zda tento úplný tok není zároveň tokem maximálním pomocí značkovací metody. Cílem je označit ústí, pokud se to nepodaří, je tento tok finální, maximální. Pokud ne pokračuje se ve značkování a přerozdělení toku na hranách.

Značkování vrcholů probíhá podle dvou pravidel.

Vrchol z je vždy označen *0*.

Ostatní vrcholy $+i, -j$:

1. pravidlo: **y(h)<c(h)** 2. pravidlo: **y(h)>0**



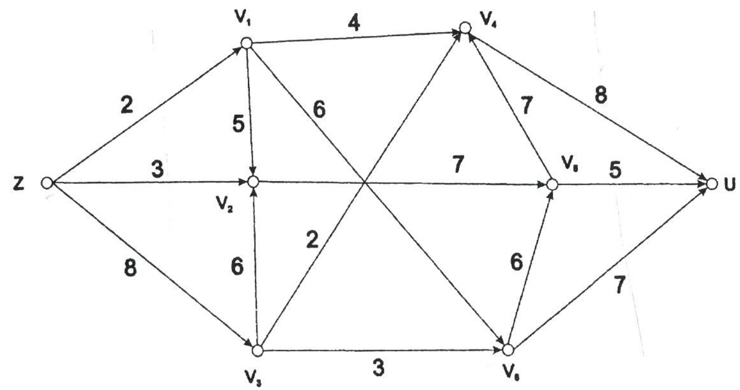
Obr. 3.3

Pokud nelze použít první pravidlo, potom můžeme použít druhé pravidlo. První pravidlo říká, že můžeme označit následující vrchol pouze tehdy, pokud hrana není nasycená a dodržujeme při tom směr orientace hrany, označujeme koncový vrchol hrany. Druhé pravidlo říká, že jdeme proti směru orientace a hrana nesmí mít nulový tok, musí po ní již nějaký tok téci, může být samozřejmě nasycená.

3.krok: Označené vrcholy značkovací metodou tvoří tzv. augmentální trasu ze zdroje do ústí. Na augmentální trase určíme max. augment (rozdíl mezi volnou kapacitou hrany a tokem na hraně/existující tok na hraně – při použití druhého pravidla) a dále skutečný augment – viz příklad 3.3, který do trasy zohledníme (přerozdělíme tok na hranách), tím se zvýší aktuální tok právě o augment a postup opakujeme do té doby, dokud se nepodaří označit ústí.

4.krok: Potom je tok v síti, tokem maximálním.

Příklad 3.3 – nalezněte maximální tok v prostorové síti



Obr. 3.3a

1.krok: Úplný tok

Libovolně volíme trasy, např.:

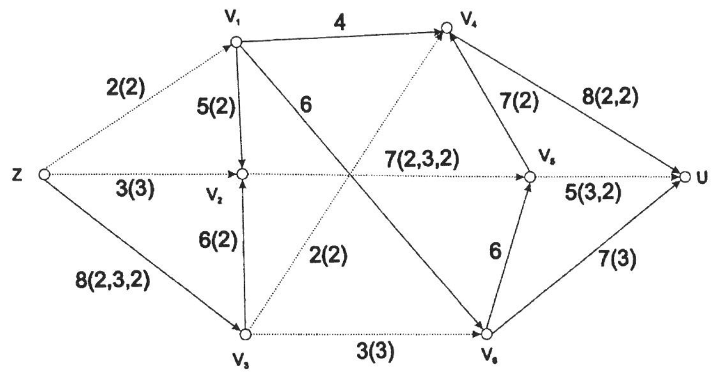
Z, V_1, V_2, V_5, U povedeme 2 jednotky toku

Z, V_2, V_5, U povedeme 3 jednotky toku

Z, V_3, V_4, U povedeme 2 jednotky toku

Z, V_3, V_6, U povedeme 3 jednotky toku

Z, V_2, V_5, V_4, U povedeme 2 jednotky toku



Obr. 3.3b

Úplný tok 12 jednotek.

Začneme značkovat vrcholy podle Ford-Fulkersonova algoritmu:

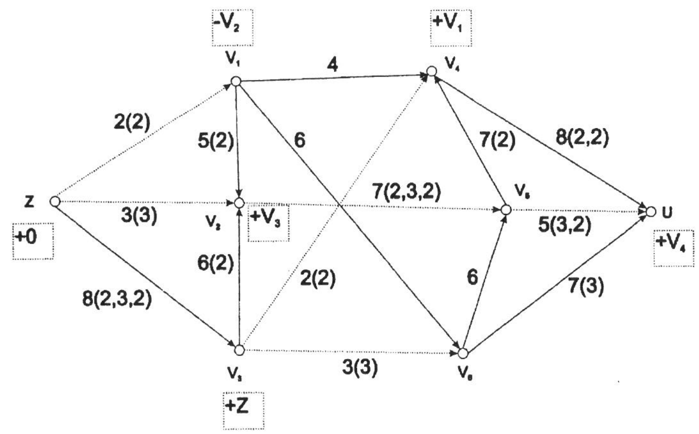
Vrchol $Z = +0$

Ze Z vystupují tři hrany, volíme 1. pravidlo, jdeme po směru orientace, hrany $[Z,V_1],[Z,V_2]$ jsou nasycené, proto vrcholy V_1, V_2 nelze označkovat. Označkujeme jediný možný vrchol, a to V_3 indexem +z, protože vycházíme ze z.

Nacházíme se ve vrcholu V_3 a stejným způsobem označíme jediný možný vrchol V_2 indexem $+V_3$ (jdeme po směru orientace, proto + a jdeme z vrcholu V_3).

Nacházíme se ve vrcholu V_2, 1. pravidlo nelze použít, zpět se nevracíme a musíme přistoupit k 2. pravidlu. Z V_2 jdeme proti směru orientace do V_1, proto jej značíme $-V_2$.

Nacházíme se ve vrcholu V_1, použijeme opět 1. pravidlo a označkujeme buď vrchol V_4 nebo V_6 a poté ústí. Zvolíme např. V_4 a U. Obě varianty jsou možné a správné.



Obr. 3.3c

Protože se nám podařilo označit ústí, lze námi nalezený tok $y_{úpl} = 12$ ještě zvýšit.

Indexy vrcholů tvoří augmentální trasu, na které budeme zvyšovat tok na hranách, které procházíme ve směru orientace a ubírat na hranách, které budeme procházet proti směru orientace.

Augmentální trasa:

$+0, +z, +V_3, -V_2, +V_1, +V_4$

Na hraně $[+0,+z]$ můžeme tok max. zvýšit o 1 jednotku (na této hraně je tok 2+3+2=7 a max. kapacita hrany je 8)

$[+z, +V_3] \Rightarrow$ max. +4 jednotky přidáme

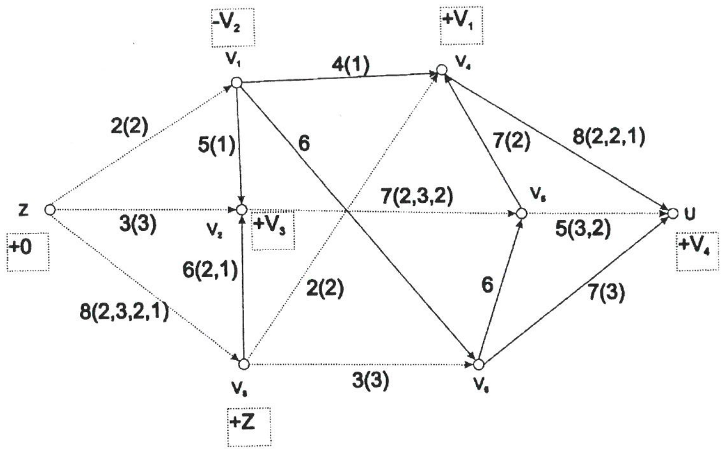
$[+V_3, -V_2] \Rightarrow$ již protekly touto hranou 2 jednotky, max. 2 jednotky můžeme ubrat

$[-V_2, +V_1] \Rightarrow$ max.+4 jednotky přidáme

$[+V_1, +V_4] \Rightarrow$ max. +4 jednotky přidáme

Toto jsou maximální augmenty ($\max\delta$) na jednotlivých hranách: $+1, +4, -2, +4, +4$

Skutečný augment, kterým zvýšíme tok na augmentální trase bude $\min|\max\delta| = +-1$ podle směru orientace procházené hrany.



Obr. 3.3d

Tok se navýšil právě o augment $y_{upl} = 12 + 1 = 13$ a znovu provedeme značkovací metodu, abychom zjistili, zda je tokem maximálním.
Protože všechny vystupující hrany ze zdroje jsou již nasycené, nemůžeme označit žádný následující vrchol, neoznačíme ani ústí, proto $y_{\max} = 13$.

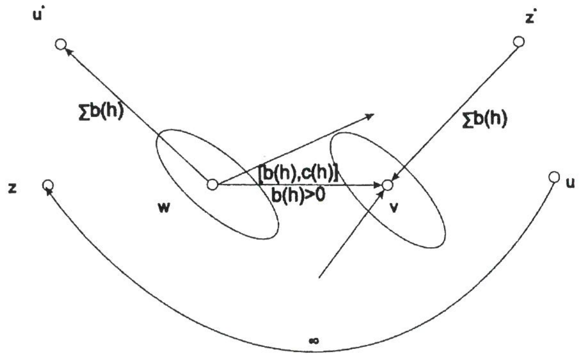
3.3 Maximální tok v intervalově ohodnocené síti

V intervalově ohodnocené síti jsou orientované hrany ohodnoceny $o(h) = \langle b(h), c(h) \rangle \wedge 0 \le b(h) \le c(h)$, přičemž $b(h)$ vyjadřuje hodnotu minimálního toku, který musí hranou protékat. Jestliže $b(h) = 0$ pro všechny hrany v síti, potom přejdeme na klasickou úlohu určení maximálního toku.
V intervalově ohodnocené síti nemusí tok existovat.
Tok v intervalově ohodnocené síti, jehož hodnoty na hranách splňují $b(h) \le y(h) \le c(h)$ nazveme přípustným tokem.

<u>Algoritmus pro sestrojení maximálního toku v intervalově ohodnocené síti:</u>

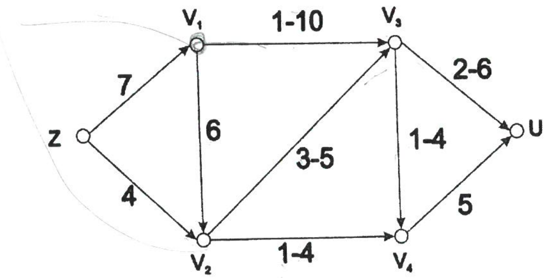
1. krok: vytvoříme novou fiktivní síť, kterou tvoří původní graf, propustnost hran změníme na $\bar{c}(h) = c(h) - b(h)$, zavedeme fiktivní zdroj z^*, zavedeme fiktivní ústí u^*,

zavedeme orientované hrany $[z^*, v]$ a $[w, u^*]$ s propustností $b[w,v]$, (jinak řečeno spojime vždy počáteční vrchol intervalově orientované hrany s fiktivním ústím a fiktivní zdroj s koncovým vrcholem intervalově orientované hrany), zavedeme fiktivní hranu $[u, z]$ s kapacitou $c[u, z] = \infty$.



Obr. 3.4

2. krok: Ve fiktivní síti určíme maximální tok $y_{f\max}$ známým algoritmem, tok musí projít přes z a u původní sítě. Pokud se $y_{f\max} = \sum b[h]$, v původní síti existuje přípustný tok, pokud ne, úloha nemá řešení.
3. krok: Vrátíme se do původní sítě, určíme přípustný tok na hranách $y(h) = b(h) + y_{f\max}$
4. krok: V původní síti určíme z přípustného toku tok maximální (v rovinné síti klasicky, v prostorové síti Ford-Fulkersonovým algoritmem). Tento tok je tokem maximálním v intervalově ohodnocené síti.
Příklad 3.4 – určete maximální tok v intervalově ohodnocené síti



Obr. 3.4a