

3. TOKY V DOPRAVNÍCH SÍTÍCH

Dopravní síť je orientovaný, neorientovaně souvislý, hranově ohodnocený, acyklický graf $G = (V, Y, p)$. Obsahuje právě jeden vrchol, ze kterého hrany pouze vycházejí – zdroj z (pramen) a právě jeden vrchol, do kterého pouze hrany vstupují – ústí u . Ostatní vrcholy dopravní sítě se nazývají vnitřní vrcholy sítě. Každá hrana grafu je ohodnocena číslem $c[h] \geq 0$, kapacitou neboli propustností hrany.

Na dopravní síti je definována funkce - tok v síti y , která přiřadí každé hraně reálnou hodnotu $y[h]$.

Pro tok v síti platí následující vztahy:

- $y[h] \geq 0$ pro všechny $h \in Y$
- $y[h] \leq c[h]$ pro všechny $h \in Y$
- $\sum_{h \in Y_z^+} y[h] = \sum_{h \in Y_z^-} y[h] = y_z$, $h \in Y_z^+$ hrany vystupující ze zdroje Z , $h \in Y_z^-$ hrany vstupující do ústí U
- $\sum_{h \in Y_v^+} y[h] = \sum_{h \in Y_v^-} y[h]$ pro všechny vnitřní uzly sítě, $h \in Y_v^+$ hrany vstupující do jednoho z vnitřních uzlů, $h \in Y_v^-$ hrany vystupující z jednoho z vnitřních uzlů

3.1 Maximální tok v rovinné síti

Síť nazveme rovinnou, je-li rovinně zakresleným orientovaným grafem (některí se žádně hrany mimo vrcholy).
Hledáme maximální tok v rovinné síti, který je zde roven toku úplnému. Úplný tok v dopravní síti je takový tok, kdy každá orientovaná cesta $m[z, u]$ obsahuje alespoň jednu nasycenou hranu. Orientovanou hranu $h \in Y$ nazveme nasycenou, pokud pro ni platí: $y[h] = c[h]$. Úplný tok je roven maximálnímu toku.

Sestrojení maximálního toku v rovinné síti nasycováním hraní:

- 1. krok:** V síti určíme nejvýše položenou dráhu $m^*[z, u]$. O dráze $m^*[z, u] \in \mathcal{M}$ hovoříme, že je nejvýše položenou dráhou, pokud každá další dráha $m[z, u] \in \mathcal{M}$ v části roviny ohraničené cyklem $m^*[z, u] \cup [u, z]$, kde $[u, z]$ je fiktivní hrana $m^*[z, u] \cup [u, z] = \mathcal{M}$. Po této dráze vedeme tolik jednotek toku, aby došlo k nasycení alespoň jedné hrany $[V_4, V_3]$.

hrany. Nasycenou hranu označíme a dále s ní nepracujeme.

2. krok: Postup opakujeme dokud existuje alespoň jedna nejvýše položená dráha obsahující jen nenasyčené hrany.

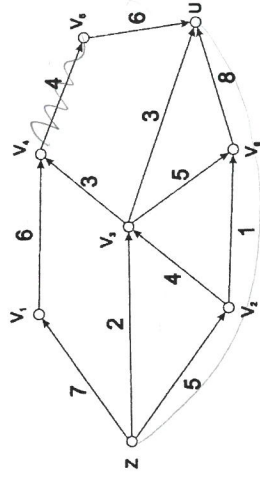
3. krok: Všechny dráhy obsahují alespoň jednu nasycenou hranu – konec, sestrojeny tok je maximální a jeho hodnota je součet toků vycházejících ze zdroje nebo vcházejících do ústí.

Sestrojení maximálního toku v rovinné síti snižováním kapacit:

V podstatě je to pouze jiná forma zápisu, k příslušným hranám nezapisujeme kolik vedeme jednotek toku, aby došlo k nasycení, ale aktuálně platnou kapacitu hrany po odečtení již aktuálního toku.

Princip je stejný, pouze při určení hodnoty maximálního toku např. součtem toků vytékajících ze zdroje, musíme na jednotlivých hranách určit tok odečtením aktuálně platné kapacity od kapacity hrany pro všechny hrany vycházející ze zdroje a poté toky na jednotlivých hranách sečíst.

Příklad 3.1 – určete maximální tok na rovinné síti s použitím nasycováním hran

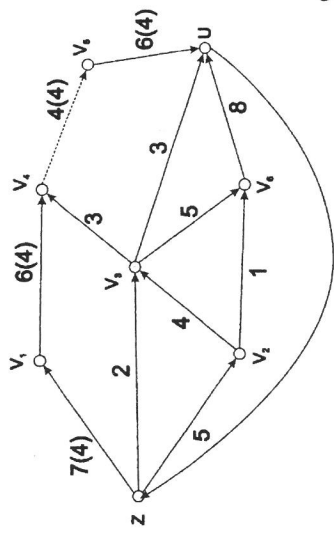


Obr. 3.1a

Přidáme fiktivní hranu mezi ústí a zdroj, abychom mohli určit nejvýše položenou dráhu $m^*[z, u]$.

První nejvýše položená dráha bude: Z, V_1, V_3, V_4, U

Maximální propustnost této dráhy budou 4 jednotky, které po této dráze povedeme a tím se nasytí hrana $[V_4, V_3]$.



Obr. 3.1b

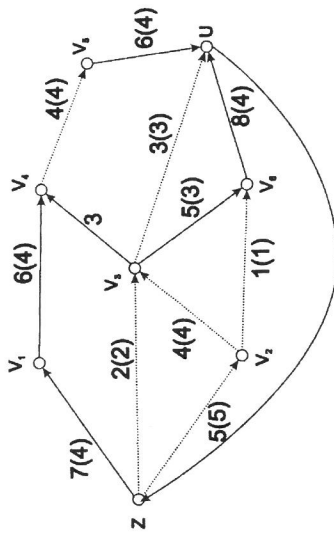
Další nejvýše položené dráhy budou:

Z, V_3, U povedeme 2 jednotky toku

Z, V_2, V_3, U povedeme 1 jednotku toku

Z, V_2, V_3, V_6, U povedeme 3 jednotky toku

Z, V_2, V_6, U povedeme 1 jednotku toku

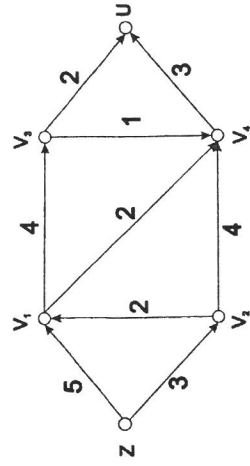


Obr. 3.1c

Nalezený tok je tokem maximálním, hodnota toku je

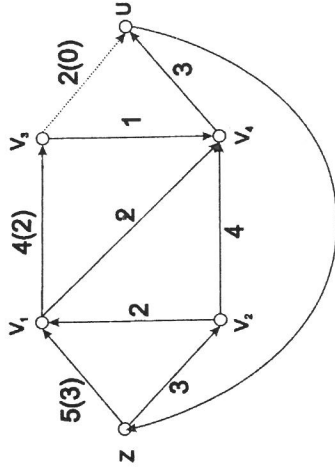
$$y_{\max} = 4 + 2 + 1 + 3 + 1 = 11 = y_z = 4 + 2 + 5 = 11 = y_u = 4 + 3 + 4 = 11$$

Příklad 3.2 - určete maximální tok na rovinné síti s použitím snižování kapacit



Obr. 3.2a

$m^*[z, u]$ - první nejvýše položená dráha bude: Z, V_1, V_3, U a po ní povedeme 2 jednotky toku, do závorek píšeme aktuálně platnou kapacitu.

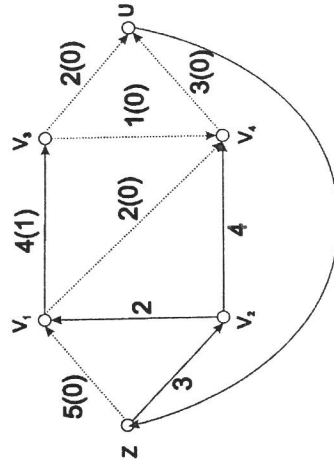


Obr. 3.2b

Další nejvýše položené dráhy budou:

Z, V_1, V_3, V_4, U povedeme 1 jednotku toku

Z, V_1, V_4, U povedeme 2 jednotky toku, uvedeme výsledný graf



Obr. 3.2c