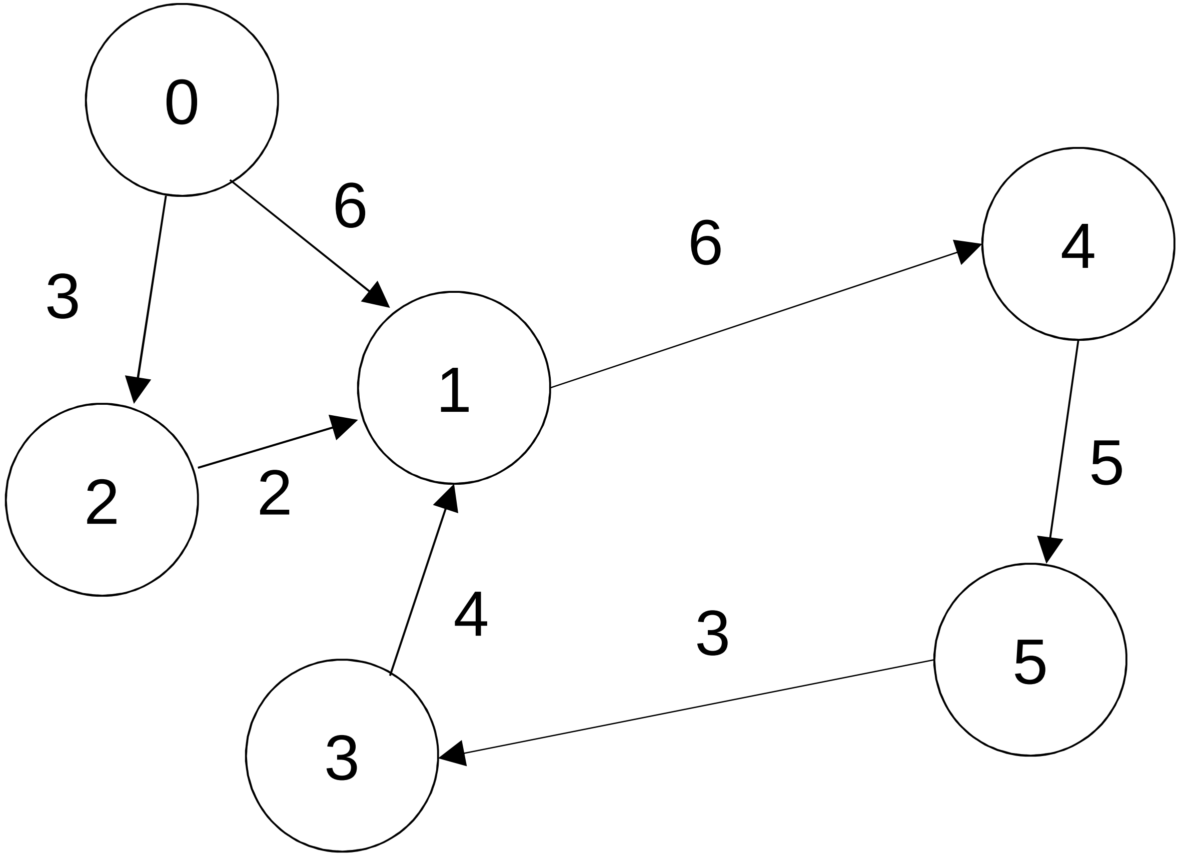
Vzdálenosti II

Vzdálenosti II

Je dán jednoduchý orientovaný ohodnocený graf G = (V,E,I) s reálným ohodnocením hran $w : E \to R$

- matice w-délek grafu G je čtvercová matice $W = [w_{ij}]$ řádu n, kde

Graf G



$$w_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{pokud } i = j \\ w(u_i, u_j) & \text{pokud } i \neq j \text{ a existuje hrana } (u_i, u_j) \in \mathrm{E} \\ \infty & \text{pokud } i \neq j \text{ a neexistuje hrana } (u_i, u_j) \notin \mathrm{E} \end{cases}$$

Graf a jeho matice délek

$$W = \begin{bmatrix} 0, & 6 & 3 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 0 & \infty & \infty & 6 & \infty \\ \infty & 2 & 0 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 4 & \infty & 0 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & 5 \\ \infty & \infty & \infty & 3 & \infty & 0 \end{bmatrix}$$

Matice vzdáleností a předchůdců

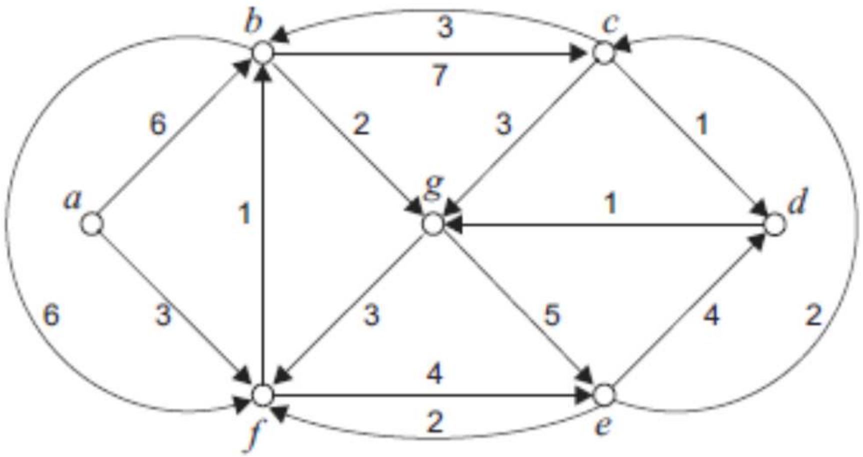
- matice vzdáleností grafu G je čtvercová matice $\mathrm{D} = [d_{ij}]$ řádu n, kde

$$d_{ij} = d_w(u_i, u_j)$$

- matice předchůdců grafu G je čtvercová matice $\mathrm{P} = [p_{ij}]$ řádu n, kde

$$p_{ij} = \begin{cases} 0 \ \text{pokud}\ i = j \ \text{nebo neexistuje cesta}\ z\ u_i \ \text{do}\ u_j \\ u_k \qquad \text{kde}\ u_k \ \text{je přředchůdc uzlu}\ u_j \\ \qquad \text{na něějak minimální cestě z}\ u_i \ \text{do}\ u_j \end{cases}$$

Matice W, D, P



$W =$

	a	b	c	d	e	f	g
a	0	6	∞	∞	∞	3	∞
b	∞	0	7	∞	∞	6	2
c	∞	3	0	1	∞	∞	3
d	∞	∞	∞	0	∞	∞	1
e	∞	∞	2	4	0	2	∞
f	∞	1	∞	∞	4	0	∞
g	∞	∞	∞	∞	5	3	0

$D =$

	a	b	c	d	e	f	g
a	0	4	9	10	7	3	6
b	∞	0	7	8	7	5	2
c	∞	3	0	1	7	5	2
d	∞	5	8	0	6	4	1
e	∞	3	2	3	0	2	4
f	∞	1	6	7	4	0	3
g	∞	4	7	8	5	3	0

$P =$

	a	b	c	d	e	f	g
a	0	f	e	c	f	a	b
b	0	0	b	c	g	g	b
c	0	c	0	c	g	g	d
d	0	f	e	0	g	g	d
e	0	f	e	c	0	b	d
f	0	f	e	c	f	0	b
g	0	f	e	c	g	g	0

Určení cesty pomocí matice P

- rekurzivní procedura

```
CESTA-1(P,i, j)
{
  if (i == j) piš(i); //cesta končí výstupem počát. uzlu
  else
   if (p_{i,j} == 0) // Uzel už nemá předchůdce
    piš('cesta z ',u_i,' do ',u_j , 'neexistuje');
   else CESTA-1(P, i, pij ); //Napřed cesta k předchůdci
  piš(j);
```

Úvaha

- označíme jako $d_{i,j}^{(m)}$ minimální w-délku cesty z u_i do u_j tvořené nejvýše *m* hranami
  - pro m = 0 se jedná o cestu neobsahující žádnou hranu, která může spojovat jen každý uzel sám se sebou; matice $D^{(0)}$ má tedy nulové prvky na diagonále a hodnoty nekonečno mimo diagonálu
- pro $m \geq 1$ určíme $d_{i,j}^{(m)}$ jako minimum z hodnoty $d_{i,j}^{(m-1)}$ (t.j. w-délky nejkratší cesty z u_i do u_j tvořené nejvýše $m-1$ hranami) a w-délky nejkratší cesty z u_i do u_j tvořené nejvýše m hranami
  - zkusíme projít cesty o nejvýše $m-1$ hranách z u_i ke všem předchůdcům u_k uzlu u_j a prodloužíme o hranu (u_k, u_j)

Úvaha

- rekurzivní pravidlo

$$d_{i,j}^{(m)} = \min(d_{i,j}^{(m-1)}, \min_{1 \leq k \leq n}(d_{i,k}^{(m-1)} + w_{kj}))$$

  – vyberu kratší cestu: buď původní o max. (m-1) hranách, nebo o m hranách, z předchůdcem u_k

  – pravidlo je základem Floydova-Warshallova algoritmu

Floyd-Warshallův algoritmus

```
FLOYD-WARSHALL(W)
{
  D(0)=W;  //počát. nastavení hodnotami wij
  for (k=1;k<=n;k++)
    for (i=1;i<=n;i++)
      for (j=1;j<=n;j++)
        d_{i,j}^{(k)}= min(d_{i,j}^{(k-1)} d_{i,k}^{(k-1)}+ d_{k,j}^{(k-1)});
  return D(n);
}
```

Floyd-Warshallův algoritmus

$$D^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 6 & \infty & \infty \\ \infty & 0 & 2 & 6 & \infty \\ \infty & \infty & 0 & -3 & \infty \\ 1 & \infty & \infty & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 4 & \infty & 0 \end{bmatrix} \quad D^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 6 & \infty & \infty \\ \infty & 0 & 2 & 6 & \infty \\ \infty & \infty & 0 & -3 & \infty \\ 1 & 4 & 7 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 4 & \infty & 0 \end{bmatrix} \quad D^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 & 9 & \infty \\ \infty & 0 & 2 & 6 & \infty \\ \infty & \infty & 0 & -3 & \infty \\ 1 & 4 & 6 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 3 & 7 & 0 \end{bmatrix} \quad D^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 & 2 & \infty \\ \infty & 0 & 2 & -1 & \infty \\ \infty & \infty & 0 & -3 & \infty \\ 1 & 4 & 6 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad D^{(4)} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & -3 & -2 \\ 1 & 4 & 6 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 5 & 5 & 5 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad P^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 0 & 4 \\ 5 & 1 & 5 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad P^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ 5 & 1 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad P^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \quad P^{(4)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$