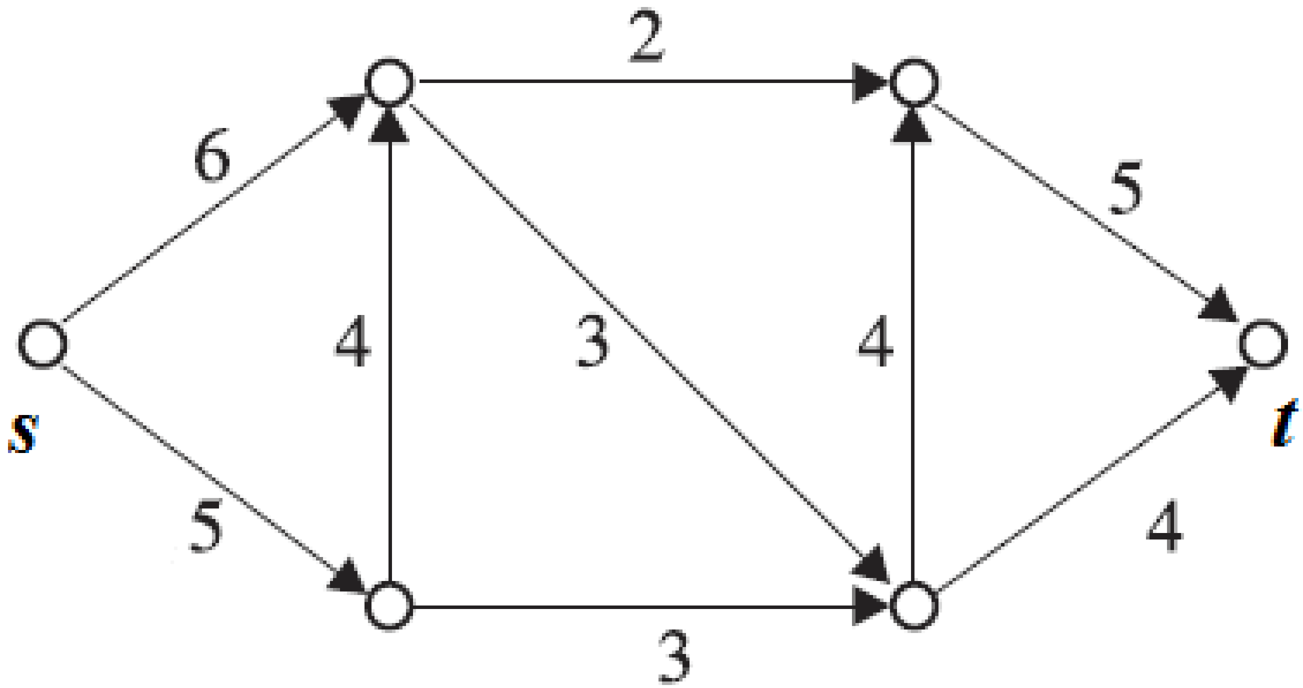
Toky v sítích

Síť

Síť:

- čtveřice $S = (G, q, s, t)$, kde $G = (V,E,I)$ je obyčejný orientovaný graf, $s \in V$ je zdroj sítě S, $t \in V$ je spotřebič sítě S a $q : E \to R^+$ je nezáporné ohodnocení hran, tzv. kapacita sítě S; pro každou hranu $h \in E$ nazýváme příslušnou hodnotu $q(h)$ kapacitou hrany h.

Síť - příklad



Tok v síti

- tok v síti S je takové ohodnoceni hran

$$f : V \rightarrow R^{+}$$

které splňuje následující podmínky:

  – pro každou hranu (u, v) ∈ V platí:

$$0 \leq f(u,v) \leq q(u,v)$$

    - není překročena kapacita hrany

  – pro každý uzel *u* sítě různý od *s* i od *t* platí:

$$\sum_{(u,v)\in H} f(u,v) - \sum_{(w,u)\in H} f(w,u) = 0$$

    - Kirchovův zákon – co do uzlu vtéká, to z uzlu vytéká

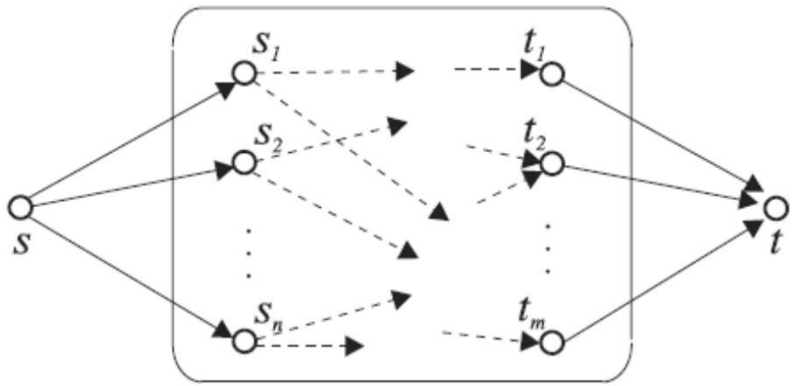
Tok v síti

- velikost toku je dána rozdílem

$$|f| = \sum_{(s,v)\in H} f(s,v) - \sum_{(u,s)\in H} f(u,s) = \sum_{(u,t)\in H} f(u,t) - \sum_{(t,v)\in H} f(t,v).$$

Síť s více zdroji a spotřebiči

- úlohu převedeme na předchozí s jedním zdrojem a spotřebičem
  - přidáme fiktivní zdroj a spotřebič
    - spojíme tento zdroj s původními zdroji hranami s nekonečnou kapacitou
    - spojíme původní spotřebiče s fiktivním spotřebičem hranami s nekonečnou kapacitou



Síť s omezenou kapacitou uzlů

- uzel *u* s omezenou kapacitou rozdělíme na dva uzly u_+ *a* u_-
  - přidáme hranu mezi u_+ *a* u_- *a ohodnotíme hodnotou kapacity uzlu*
  - do uzlu u_+ přivedeme hrany vedoucí do původního uzlu *u*
  - z uzlu u_- vedeme hrany vedoucí z původního uzlu *u*

Ford Fulkersonův algoritmus
hledání max. toku v síti

Najdi-Cestu(S)

for každý uzel $u \in U$	Označení všech uzlů
do $stav[u]$:=FRESH	jako nenalezených.
$p[s] := +s; d[s] := \infty; stav[s]$:=OPEN	Začátek hledané cesty.
repeat u:= libovolný otevřený uzel	Výběr uzlu pro pokračování:
$stav[u]$:=CLOSED	nejprve se uzavře,
for každý uzel $v \in \Gamma(u)$ **do**	všichni noví následnící
if ($stav[v]$=FRESH)	
& $(f(u,v) < q(u,v))$ **then**	se otevřou,
$stav[v]$:=OPEN; $p[v] := +u$;	určí se kladný předchůdce
$d[v] := \min(d[u], q(u,v) - f(u,v))$	a možný přírůstek toku.
for každý uzel $v \in \Gamma^{-1}(u)$ **do**	Pro jeho předchůdce
if ($stav[v]$ =FRESH) & $(f(v,u) > 0)$ **then**	se provede totéž,
$stav[v]$:=OPEN; $p[v] := -u$;	pouze záporný předchůdce
$d[v] := \min(d[u], f(v,u))$	a jiný možný přírůstek.
until (neexistuje otevřený uzel) $\vee$ $(u = t)$	
return $u = t$	TRUE při nalezení cesty

Zvyš-Tok(S)

$x := t; \delta := d[t]$	Začíná se
repeat $v := x$	od spotřebiče t.
if $p[v] = +u$	Hrana je ve směru,
then $f(u,v) := f(u,v) + \delta$	zvyšuje se její tok,
else $f(v,u) := f(v,u) - \delta$	jinak se snižuje protitok.
$x := u$	Přechod na předchůdce,
until $v = s$	dokud nejsme u zdroje.

FORD-FULKERSON(S)

for každou hranu $(u,v) \in H$	Počáteční nastavení
do $f(u,v) := 0$	toku na nulu.
while Najdi-Cestu(S)	Dokud existuje cesta,
do Zvyš-Tok(S)	zvyšuj tok v síti.
return f	

Planární sítě

- planární (rovinný) graf
  - graf, který lze nakreslit v rovině bez křížení hran
- určení max. toku je jednodušší
  - algoritmus severní cesty – viz cvičení