

ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE
FAKULTA DOPRAVNÍ

Bc. Kozlovská Olha

**ŘEŠENÍ SPOJITÝCH LOKAČNÍCH ÚLOH
VYBRANÉHO TYPU**

Diplomová práce

2021



K617..... Ústav logistiky a managementu dopravy

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE
(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

Jméno a příjmení studenta (včetně titulů):

Bc. Olha Kozlovska

Studijní program (obor/specializace) studenta:

navazující magisterský – LA – Logistika a řízení dopravních procesů

Název tématu (česky): **Řešení spojitých lokačních úloh vybraného typu**

Název tématu (anglicky): Solving of Chosen Type of Continuous Location Problems

Zásady pro vypracování

Při zpracování diplomové práce se řiďte následujícími pokyny:

- obecná charakteristika lokačních úloh,
- typologie spojitých lokačních úloh,
- charakteristika vybraného typu lokační úlohy a jejího uplatnění v logistické praxi,
- realizace výpočetních experimentů,
- zhodnocení dosažených výsledků.



- Rozsah grafických prací: podle pokynů vedoucího diplomové práce
- Rozsah průvodní zprávy: minimálně 55 stran textu (včetně obrázků, grafů a tabulek, které jsou součástí průvodní zprávy)
- Seznam odborné literatury: Janáček, J.: Optimalizace na dopravních sítích. Žilina: Žilinská univerzita v Žilině, 2002, 248 s. ISBN: 80-8070-031-1
- Plastria, F.: Continuous location problems: Research, results and questions. In Facility Location: a survey of applications and methods. Springer, 1995.

Vedoucí diplomové práce: **doc. Ing. Dušan Teichmann, Ph.D.**

Datum zadání diplomové práce: **30. června 2020**
(datum prvního zadání této práce, které musí být nejpozději 10 měsíců před datem prvního předpokládaného odevzdání této práce vyplývajícího ze standardní doby studia)

Datum odevzdání diplomové práce: **1. prosince 2021**

a) datum prvního předpokládaného odevzdání práce vyplývající ze standardní doby studia a z doporučeného časového plánu studia

b) v případě odkladu odevzdání práce následující datum odevzdání práce vyplývající z doporučeného časového plánu studia

doc. Ing. Tomáš Horák, Ph.D.
vedoucí
Ústavu logistiky a managementu dopravy



doc. Ing. Pavel Hrubeš, Ph.D.
děkan fakulty

Potvrzuji převzetí zadání diplomové práce.

Bc. Olha Kozlovská
jméno a podpis studenta

V Praze dne20. srpna 2021

Prohlášení

Předkládám tímto k posouzení a obhajobě diplomovou práci, zpracovanou na závěr studia na ČVUT v Praze Fakultě dopravní.

Nemám závažný důvod proti užívání tohoto školního díla ve smyslu § 60 Zákona č. 121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon).

Prohlašuji, že jsem předloženou práci vypracoval samostatně a že jsem uvedl veškeré použité informační zdroje v souladu s Metodickým pokynem o dodržování etických principů při přípravě vysokoškolských závěrečných prací.

V Praze dne :

30.11.2021



podpis

Poděkování

Ráda bych poděkovala svému vedoucímu doc. Ing. Dušanu Teichmannu, Ph.D. za vedení diplomové práce, připomínky k řešení úloh a k celkovému zpracování.

V neposlední řadě bych chtěla poděkovat svým rodičům a celé své rodině za všechnu podporu, kterou jsem cítila v průběhu celého studia a taky dalším lidem a věcem díky kterým jsem nikdy nepřestala jít vpřed.

Abstrakt

Diplomová práce se zabývá výzkumem vybraných modelů spojitého lokačního úlohy na umístění žádoucích a nežádoucích zdrojů s následujícím řešením daných modelů pomocí procesu diskretizace v optimalizačním software. Výsledné výpočetní časy modelů byly následně vzájemně porovnány za účelem posouzení efektivnosti jednotlivých modelů a prověření vzájemné závislosti mezi počtem lokalit, počtem vazebních podmínek a výpočetním časem.

Klíčová slova

Optimalizace, spojitá lokační úloha, proces diskretizace, optimalizační software Xpress-IVE, lineární programování, lineární regrese.

Abstract

This diploma thesis researches the selected models of continuous location problems for the location of desirable and undesirable facilities. These models were solved by using a process of discretization in optimization software. The resulting computing time of the models were compared with each other to assess the effectiveness of models and evaluate possible connection between the number of facilities, the number of conditions and the computing time.

Keywords

Optimization, continuous location problem, process of discretization, optimization software Xpress-IVE, linear programming, linear, regression.

OBSAH

1 ÚVOD	7
2 TEORETICKÁ ČÁST	8
2.1 Vznik a vývoj odvětví lokační analýzy	8
2.2 Obecná charakteristika lokačních úloh	12
2.3 Základní kategorizace lokačních úloh podle kontinuity území vhodného pro rozmíst'ování zdrojů	15
2.4 Lineární programování.....	15
2.4.1 Matematická formulace úlohy lineárního programování	18
2.5 Matematická formulace obecné spojité lokační úlohy	20
2.6 Metody pro řešení spojitých lokačních úloh	21
2.7 Matematická formulace obecné diskrétní lokační úlohy.....	23
2.8 Lokační modely s umíst'ováním pozitivních zdrojů na síti	24
2.8.1 Matematická formulace lokační úlohy typu p medián	26
2.8.2 Matematická formulace lokační úlohy typu p centrum	27
2.9 Lokační úlohy s umíst'ováním nežádoucích zdrojů na síti	29
2.9.1 Matematická formulace lokační úlohy typu maxisum p -disperze	32
2.9.2 Matematická formulace lokační úlohy typu maximin p -disperze	33
3 EXPERIMENTÁLNÍ ČÁST	35
3.1 Charakteristika zkoumaného území.....	35
3.2 Řešení optimalizačních úloh pomocí software Xpress-IVE	40
3.2.1 Text programu pro řešení úlohy typu p medián	43
3.2.2 Text programu pro řešení úlohy typu p centrum.....	46
3.2.3 Text programu pro řešení úlohy maxisum p -disperze	48
3.2.4 Text programu pro řešení úlohy typu maximin p -disperze.....	50
4 Vyhodnocení výsledků.....	53
4.1 Zvolená metodika vyhodnocení výsledků výpočetních experimentů.....	53
4.1.1 Vyhodnocení výsledků výpočetních experimentů úlohy typu p -medián.....	57
4.1.2 Porovnání dvou modelů úlohy typu p -medián.....	60
4.1.3 Vyhodnocení výsledků výpočetních experimentů úlohy typu p -centrum	61
4.1.4 Porovnání dvou modelů úlohy typu p -centrum	63
4.1.5 Porovnání modelů úloh typu p -medián a p -centrum.....	64
4.1.6 Vyhodnocení výsledků výpočetních experimentů úlohy typu p -disperze maxisum a maximin	66
4.1.7 Porovnání modelů úloh typu p -disperse maxisum a maximin	68

4.2 Shrnutí vyhodnocení výsledků výpočetních experimentů všech typů úloh	69
5 Závěr	71
Literatura	73
Seznam obrázků	75
Seznam tabulek	76
Přílohy	77
Příloha č.1 – Distanční matice z textu programu pro řešení úlohy typu p medián	77
Příloha č.2 – Distanční matice z textu programu pro řešení úlohy typu p centum	78
Příloha č.3 – Distanční matice z textu programu pro řešení úlohy typu maximum p disperze	80
Příloha č.4 – Distanční matice z textu programu pro řešení úlohy typu maximum p disperze	81

1 ÚVOD

Logistika jako vědní obor se rychle začala rozvíjet v období druhé světové války, kdy se lidé poprvé setkali s logistickými problémy, které vycházely z potřeby přemístění do té doby nemyslitelné množství lidí, techniky a zásob. Od té doby zásadním způsobem vzrostl význam logistiky jako nástroje pro zvýšení konkurenceschopnosti podniku. Pomocí logistických metod jsou optimálně rozmístěny objekty na území nebo zvyšována efektivita využití kapitálových zdrojů. V současné době logistika patří ke klíčovým rozhodovacím disciplínám, která přímo nebo nepřímo ovlivňuje každodenní život.

Lokační analýza se zabývá rozmístováním objektů na zájmovém území a je jednou ze základních otázek, které logistika zkoumá. Lokační úloha se zaměřuje na rozhodování o budoucím umístění objektů v území vzhledem k umístění zákazníků a s ohledem na náklady vznikající v systému. Za lokační úlohu se počítá každý rozhodovací problém o umístění nebo změně umístění objektů v území začínající od umístění malé prodejny v novém regionu až po organizaci celého nového logistického řetězce.

Vzhledem k možnému umístění nového zdroje se lokační úlohy dělí na diskrétní a spojitě. Diskrétní lokační úlohy jsou úlohy s přesně daným konečným počtem lokalit na umístění zdrojů. Zkoumání diskrétních lokačních úloh a jejich rozdělení na typy a podtypy s možným využitím v praxi bylo tématem mé bakalářské práce. Spojité lokační úlohy naopak pracují s neomezeným počtem lokalit na umístění zdrojů což dělá tento podtyp lokačních úloh méně populárním a realizovatelným v reálných podmínkách. Obtížnost daných úloh je v jejich řešení a absenci různých výpočetních algoritmů což vyplývá z toho, že jejich zkoumáním se začaly zabývat zhruba 40 let po vzniku logistiky jako vědní disciplíny.

V dané diplomové práci se právě proto zaměřím na řešení spojitě lokační úlohy. Nejdříve ale se seznámíme s historií lokačních úloh, lineárním programováním a první nejjednodušší lokační úlohou. Následně prozkoumáme různé možnosti řešení spojitých lokačních úloh pomocí vybraných modelů s žádoucími a nežádoucími zdroji v území. V praktické části diplomové práce se pokusíme vytvořit pracovní území na kterém provedeme výpočet zvolených modelů s využitím procesu diskretizace s následujícím experimentováním s počtem zdrojů v modelu pro zkoumání závislosti času výpočtu na druhu vazební podmínky a počtu umístěních zdrojů.

2 TEORETICKÁ ČÁST

2.1 Vznik a vývoj odvětví lokační analýzy

Lokační analýza neboli věda o optimálním rozmístění zařízení v prostoru patří v současné době k nejvýznamnějším disciplínám operačního výzkumu. Každé rozhodnutí o zřízení a provozu nového zdroje firmy může mít za následek změny v produktivitě, efektivitě, konkurenceschopnosti a posléze v celkovém budoucím rozvoji firmy. Vzhledem k tomu je rozmístění zdrojů v lokalitách přednostním stěžejním momentem v rozhodovacím procesu většiny veřejných a soukromých firem jejichž procesy jsou závislé na dopravě, distribuci, výrobě, rozhodnutích na dodavatelském řetězci a telekomunikaci.

Příklady lokační úloh mohou být následující situace :

- lokace množiny skladů v rámci dodavatelského řetězce s účelem minimalizace času potřebného k uvedení zboží na trh,
- lokace veřejně přístupných míst jako jsou nemocnice, vzdělávací zařízení, střediska integrovaného záchranného systému rozmísťovaných za účelem maximálního pokrytí území,
- lokace skladů nebezpečných materiálů za účelem minimalizace jejich negativního vlivu na obyvatelstvo,
- lokace prvků dopravního systému jako jsou zastávky, parkoviště, čerpací stanice, za účelem zlepšení kvality dopravního systému,
- lokace poboček a automatů banků a jiných finančních firem za účelem zvýšení pohodlí uživatelů jejich služeb.

I přesto, že dané příklady se rozlišují ve svých kritériích umístění a ve subjektech a objektech, se kterými se v dané situaci počítá, jedná se o různé typy lokačního problému. Přestože problematikou efektivního umístění zdrojů výzkumníci aktivně začali zabývat teprve v 60. letech minulého století a většina známých a rozšířených modelů lokační analýzy pochází taky z tohoto období, začátky daného oboru lze dohledat už v 17. století [2].

Za první lokační problém se považuje problém, který zformuloval francouzský vědec Pierre de Fermat a jmenuje se Minimální sumární problém euklidovské vzdálenosti mezi vrcholy (anglicky *Mini-Sum Euclidean distance point problem*)[14]. Smyslem úlohy bylo umístit čtvrtý bod v prostoru tak aby se minimalizoval součet euklidovské vzdálenosti mezi tímto bodem a třemi umístěnými body v prostoru. Daný problém se snažila řešit celá řada známých vědců jako italský vědec Evangelista Torricelli, Jesuit Bonaventura Cavalieri, Vincenzo Viviani, francouzský vědec Gilles Personne de Roberval, anglický vědec Thomas Simpson nebo švýcarský vědec Jakob Steiner. Kromě toho, že se uvedení vědci snažili různými způsoby daný problém vyřešit, tak ho

ještě rozšířili, čímž vznikly nové aspekty a směry řešení úlohy. Například Thomas Simpson navrhnul rozšířit úlohu o váhy vrcholů a minimalizovat vážený součet euklidovských vzdáleností. Jakob Steiner naopak se snažil úlohu řešit s větším počtem zdrojů tak, aby celková vzdálenost vedoucí k jejich propojení byla minimální (úloha o tzv. Steinerově stromu).

Na začátku dvacátého století ekonomové a inženýři začali zkoumat možnosti využití Fermatovy úlohy v reálném světě. Alfred Weber prvním poskytnul praktické využití Fermatova problému v průmyslovém kontextu tím, že začal řešit problém vytvoření distribuční sítě pomocí vážené verze Fermatovy úlohy [25]. V jeho úloze bylo cílem vytvořit síť skladů tak, aby se minimalizoval součet euklidovských vzdáleností mezi sklady a zákazníky s ohledem na množství přepravovaného zboží zákazníkům a posléze i na přepravní náklady vzniklé na síti. I když Weber dokázal vytvořit matematickou formulaci svého problému, exaktní metodu pro řešení již nevytvořil.

Weberův problém se často používá jako základ pro vytvoření dalších úloh lokační analýzy. Jeho příspěvek danému oboru se ovšem neomezuje jen na matematickou formulaci problému. Ještě k tomu představil kvalitativní aspekty, které je potřeba zohlednit při řešení lokačních problémů, a popsal jaké další kritéria rozhodují o budoucí poloze zdroje. Vzhledem k rozvoji průmyslových systémů a dopravní, telekomunikační a energetické infrastruktury na začátku dvacátého století se hojně rozšířily možnosti umístění objektů v území a vznikl popis kvalitativních aspektů Webera nutný při rozhodovacím procesu. Weberovy faktory, které ovlivňují budoucí umístění zdroje, jsou například:

- náklady na umístění, jako součet nákladů na nákup pozemků, výstavbu potřebných budov a podobně;
- přepravní náklady, které se rovnají nákladům potřebným na přepravu zboží ze zdrojů zákazníkům;
- náklady na personál, mzdy a jiné výplaty zaměstnancům, jejichž výše závisí na dostupnosti pracovní síly v regionu;
- náklady na suroviny, materiál a polotovary, které závisí na dostupnosti vhodných dodavatelů blízko zdroji;
- dostupnost kvalitní infrastruktury a potřebných středisek obsluhy kolem umístěného zdroje.

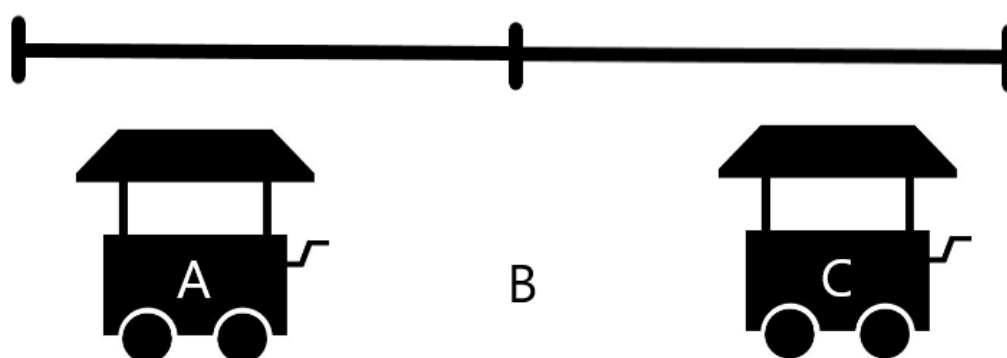
Ve svých pracích Weber ještě popisoval důsledky umístění průmyslových objektů v různých geografických, ekonomických a demografických oblastech a možné aglomerační důsledky takových rozhodnutí. Kromě toho se věnoval reakcím jiných účastníků distribučního řetězce, jako existujících a potenciálních dodavatelů a zákazníků, na umístění daného typu zdroje v prostoru.

Závislost umístění zdrojů na přepravních nákladech a nákladech na pořízení území jako součást lokační analýzy zkoumal německý ekonom Johann Heinrich von Thunen. Vytvořil model,

ve kterém cena pozemku, který se bude používat za účelem pěstování zemědělských plodin, roste s jeho přiblížením k centru města a je potřeba najít takový pozemek, který bude minimalizovat celkové náklady na nákup pozemku a budoucí přepravní náklady pro přepravu surovin z pozemku do města.

Další typ lokačního problému vytvořil americký ekonom Harold Hotelling [1]. Zabýval se problémem umístění dvou zdrojů, které poskytují stejné zboží nebo stejný servis, a usilují o zvýšení poptávky na jejich komoditu. Pro pochopení daného problému používal jednoduchý příklad. Představme si, že existuje jedna pláž, na které jsou dva kiosky se zmrzlinou. Majitele těchto kiosků mohou si zvolit libovolné místo na pláži s tím, že vědí umístění kiosku konkurenta. V modelu existují dva předpoklady o chování zákazníků. První z nich tvrdí, že zákazník vždy koupí zmrzlinu v tom kiosku, který se k němu nachází blíž. Druhý předpoklad říká, že zákazník nesmí odejít z pláže, aniž by si koupil zmrzlinu v nějakém třetím kiosku.

Na obrázku č.1 je znázorněn případ kdy oba kiosky budou obsluhovat právě polovinu zákazníků s minimální průměrnou dobou chůze zákazníků ke kiosku a v modelu tak nastane rovnovážný stav. To jsou tedy pochopitelně místa pro umístění kiosků ve čtvrtině a ve třech čtvrtinách celkové délky pláže, které na obrázku jsou znázorněny jako body A a C. Bod B je úplným středem zkoumaného území.



Obrázek č.1 – Schématické znázornění rozmístění dvou kiosků podle problému Hotellinga

Hotelling ale ukázal, že takové řešení ve skutečnosti není v rovnovážném stavu. Přiblížením kiosku z bodu A ke kiosku v bodě C majitel kiosku A by rychle pochopil, že taková strategie mu povoluje nejen udržet své stálé zákazníky, ale i získat nové zákazníky, kterým by v nové pozici kiosk A byl bližší než kiosk v bodě C. Analogicky, majitel kiosku v bodě C by také časem pochopil, že pro něj je výhodné měnit umístění svého kiosku blíž k centru pláže. Proto rovnovážným řešením by bylo umístit oba kiosky v bodě B, tedy uprostřed pláže, s tím, že vzniknou někteří znevýhodnění zákazníci.

Arthur Smithies, což je americký ekonom původem z Rakouska, rozšířil problém Hotellinga tím, že do modelu doplnil elasticitu poptávky závislou na vzdálenosti zákazníka do kiosků. V takovém případě by oba kiosky, které jsou umístěny uprostřed prostoru, ztrácely zákazníky z extrémně vzdálených bodů, protože jejich potíže, vzniklé dlouhou chůzí, by převyšovaly jejich zážitky ze zakoupeného produktu. Při takovýchto okolnostech oba kiosky už nebudou umístěny přímo ve středu pláže pro uspokojení zákazníků ze vzdálených míst pláže, ale jejich poloha bude vždy blíže ke středu pláže než k její okrajím.

Hotellingův model se ukázal jako velmi úspěšný, jelikož představil v teorii lokační analýzy koncept konkurence a díky aplikacím teorie her se daný přístup často využívá pro popis a řešení problémů umístění zdrojů s ohledem na konkurenci v daném území.

V polovině dvacátého století se začali vědci aktivně věnovat lokačním úlohám řešeným na grafech. Jedná se o vytvoření dopravní a komunikační sítě pomocí grafu $G = (V, X)$, kde V je množina vrcholů a X je množina hran. Euklidovská vzdálenost mezi dvěma vrcholy je v takovém případě nahrazena nejkratší cestou mezi těmito vrcholy ve grafu. Hakimi v roce 1964 dokázal převést Weberův problém do tvaru grafu a ukázal, že optimálního řešení lze dosáhnout při umístění zdrojů ve vrcholech grafů. Účelová funkce Hakimiho modelu je podobná účelové funkci modelu Webera s jedním rozdílem a to je právě v jiném způsobu výpočtu vzdálenosti pomocí nejkratší cesty v grafu. Následně Hakimi vytvořil i váženou verzi Weberového problému, kde každému zákazníkovi byla přiřazena jiná hodnota požadavku, která reprezentovala váhu, neboli důležitost daného zákazníka.

V stejném roce Hakimi představil ještě jeden lokační model, který se jmenuje p -centrum lokační problém (anglicky *p-center problem*) [12]. Cílem toho modelu je umístit právě p zdrojů (p je definováno předem) v grafu, který reprezentuje dopravní síť, a minimalizovat vzdálenost nejvzdálenějšího zákazníka k nejbližšímu zdroji. Účelovou funkci modelu je tedy minimalizovat maximální vzdálenost mezi zákazníky a jejich obsluhujícími zdroji. Vzhledem ke své povaze se p -centrum model nejčastěji používá pro umístění středisek veřejných služeb jako například škol, nemocnic, středisek integrované záchranné služby apod. Obecnou metodu pro řešení tohoto modelu navrhli vědci Z. Drezner a G. O. Weselowský v roce 1978.

Americký vědec Leon Cooper představil novou verzi Weberova problému, kterou pojmenoval jako lokačně-alokační problém (anglicky *Location-Allocation problem*) ve kterém zdroje mají být umístěny s ohledem na minimalizaci celkových nákladů v modelu a zákazníci mají být přiděleni k těmto umístěným zdrojům s ohledem na kapacitní omezení.

Často se v literatuře používá varianta lokační úlohy, ve které zdroj může uspokojovat požadavek zákazníka, jestli zákazník nachází od zdroje ve vzdálenosti nižší nebo rovné, než je zvolená hraniční hodnota. S takovým předpokladem vědci C. Toregas, R. Swain, C. S. ReVelle a L. Bergman vytvořili pokrývací problém (anglicky *Set Covering problem*), který určí kolik a kde

přesně je potřeba umístit zdroje, aby byli pokryti všichni zákazníci [31]. Každá lokalita vhodná pro umístění zdroje je charakterizovaná oslužnou vzdáleností (anglicky *covering radius*), která udává maximální možnou vzdálenost mezi těmto zdrojem a zákazníkem. Cílem tohoto modelu je umístit minimální počet zdrojů s dodržáním podmínky pokrytí všech zákazníků.

R. Church a C. S. ReVelle v roce 1974 představili opačný k předchozímu model, který se jmenuje model maximálního pokrytí (anglicky *Maximal Covering Location Problem*). V daném modelu je počet zdrojů, které je potřeba v prostoru umístit, přesně daný a maximalizuje se počet zákazníků, kteří budou umístěnými zdroji pokryté.

Celá řada vědců vytvořili další modely vhodné pro veřejný sektor, ve kterých se zdroje umísťovaly do shluků zákazníků tak, aby byly co nejvíc přístupné většímu počtu zákazníků najednou. Takové modely měly ve své názvu slovíčko „táhnout“ (anglicky *pull*), jelikož velké shromáždění zákazníků „táhlo zdroje k sobě“.

Snaha o udržitelnost životního prostředí vedla vědce ke vytvoření jiných typů modelů lokační analýzy. Takovým typem modelu je například model umístění nežádoucích zdrojů (anglicky *Obnoxious Facility Location Problems*) [3]. V tomto modelu je potřeba umístit zdroje, které je potřeba někde umístit, ale mají zároveň nežádoucí účinky, jako například sklady nebezpečných látek, spalovny odpadu, jaderné elektrárny, a cílem je umístit tyto zdroje tak, aby obtěžovaly co nejmenší část obyvatelstva v regionu.

Rozvoj moderních technologií a infrastruktury, změny v ekonomice, rozšíření outsourcingu, decentralizace výrobního procesu probíhající v posledních desetiletích vyžadují změny v lokační analýze a nové modely, které budou více respektovat strategie snižování nákladů, zvýšení efektivity procesů, dodržení ekonomických předpokladů a snížení negativních dopadů na životní prostředí ve veřejném a soukromém sektoru. Například vědci R. Church a M. P. Scaparra vytvořili práci o ochraně kritické infrastruktury pod vlivem událostí 11. září 2001 a následujících obav z teroristických útoků. Jejich práce je zaměřená na určení nejdůležitějších prvků infrastruktury, po jejichž zániku by bylo obtížné provádět dané činnosti.

2.2 Obecná charakteristika lokačních úloh

Problémy umístění zdrojů neboli lokační úlohy řeší potřebné počty, vhodná umístění, nezbytná vybavení a rozměry nových zdrojů, mohou však řešit také přemístění již existujících zdrojů, jejich prodej nebo zmenšování jejich používaných rozměrů. V průmyslové logistice se rozhoduje o umístění zdrojů, prostřednictvím kterých budou uspokojovány požadavky zákazníků dodavateli s cílem minimalizovat vzniklé náklady. V případě veřejného sektoru se např. rozhoduje přiřazení zákazníka ke zdrojům servisu z účelem zvýšení pohodlnosti zákazníka [4].

Rozhodnutí o umístění jsou vždy vyžadována při vytvoření nového logistického řetězce. Vzhledem k tomu, že tato rozhodnutí jsou dlouhodobá, musí se s tímto problémem zacházet strategicky a takticky, což znamená, že se vždy bere v potaz nejen současné umístění dodavatelů surovin a zákazníků, ale také budoucí vývoj nabízeného zboží nebo servisu, možné konkurenti, pokrok moderních technologií, územní plány měst a vize do budoucna. Navíc je potřeba vždy mít na paměti, že každé rozhodnutí ovlivňuje nejen samotný podnik, ale i poptávku a celý segment trhu a region.

Centrálním prvkem každé lokační úlohy je zdroj. Pod pojmem zdroj můžeme představit výrobní podnik, sklad materiálů, zdravotnické zařízení, administrativní budovu, obchodní středisko, depo nebo distribuční centrum v závislosti na úloze, kterou řešíme. Zdroje se umísťují do lokalit v závislosti na jejich vzájemných vztazích s ostatními objekty v daném systému. V dané diplomové práci budou zdroje reprezentovány množinou I . [28]

Lokační úlohy s ohledem na zdroje můžeme rozdělit do několika různých skupin, například podle počtu zdrojů, který je potřeba v síti umístit, podle kapacit zdrojů nebo podle kritérií, které určují umístění zdrojů. Úlohy podle velikosti dělíme na úlohy pro umístění 1 zdroje nebo p zdrojů kde $p > 1$. Úlohy s umístěním 1 zdroje jsou z hlediska řešení jednodušší než úlohy zajišťující umístění více zdrojů jelikož že se v nich nezabýváme otázkou přiřazení zákazníků ke zdrojům.

Mají-li zdroje definovanou kapacitu, jedná se o kapacitně omezenou úlohu (v odborné literatuře se kapacita zdroje často značí a_i). Jestli každý zdroj může uspokojit součet požadavků všech zákazníků, tak se jedná o úlohu kapacitně neomezenou. V dané diplomové práci se budu zabývat právě tímto druhem lokačních úloh.

Umístění zdrojů v lokalitách můžeme provádět se snahou o minimalizaci nákladů, ztrát nebo nepohodlí obyvatelstva kolem zdroje, nebo o maximalizaci zisku nebo kvality nabízených služeb. Jinými slovy kritéria umístění zdrojů můžeme rozdělit na kritéria založená na snaze dosáhnout ekonomického efektu a kritéria přístupnosti a spravedlivosti pro zákazníky. V jednodušších lokačních úlohách účelová funkce počítá jen s jedním kritériem umístění, při komplexních situacích se zkoumá více kritérií současně.

V některých lokačních úlohách je možný tok komodit nejen mezi zdrojem a zákazníkem, ale i mezi zdroji stejného druhu. V takovém případě optimální umístění zdrojů vychází nejen z umístění zákazníků v území ale i ze vzájemného umístění zdrojů mezi sebou. Jedná se o lokační úlohy s interakcemi (anglicky *location problem with interactions*).

Se zřízením zdroje mohou být v lokačních úlohách spojeny náklady. Náklady mohou být fixní a variabilní. Fixní náklady se vztahují přímo k zprovoznění zdroje v lokalitě L_i a budeme je značit písmenem f_i . Variabilní náklady jsou všechny náklady spojené přímo s výrobou komodity nebo se zajištěním služby a mohou být každého časového období různé, jelikož závisí od

různých faktorů jako jsou požadaky zákazníků, cena práce a zdrojů, režijní náklady. V dané diplomové práci se tímto druhem nákladů nebudeme zabývat.

Druhým důležitým prvkem lokační úlohy jsou zákazníci, které bude reprezentovat množina J . Umístění zákazníků v každé lokační úloze je předem dáno, stejně tak jsou dány i jejich požadavky a to buď na komodity nebo na zásoby nebo na nějaký druh servisu v závislosti na zkoumané úloze. Požadavek zákazníka budeme značit b_j . Při uspokojení požadavku zákazníka vznikají přepravní náklady, které budeme značit c_{ij} .

Důležitým prvkem je produkt, který zdroj nabízí. Podle stejnorodosti nabízeného produktu, lze lokační úlohy rozdělit na jednodukomoditní a vícekomoditní. V jednodukomoditní lokační úloze přes lokační systém proudí jeden druh zboží. Vícekomoditní úloha najednou pracuje s více nabízenými produkty s různými charakteristikami. Velmi často se v takovém případě vytváří pro každou komoditu svůj submodel uvnitř obecného modelu lokační úlohy.

Lokační úlohy podle ekonomické důležitosti toků komodit, které proudí z a do zdroje, lze rozdělit na dvě skupiny. Jednostupňová lokační úloha (anglicky *Single-echelon location problem*) je jednodukovová lokační úloha, ve které buď tok vycházející ze zdrojů, které mají být umístěné, nebo tok vstupující v tyto zdroje je zanedbatelný. Příkladem takové lokační úlohy může být například továrna, která pro svoji výrobu potřebuje materiál, který je volně dostupný ve zkoumaném území a přepravní náklady od dodavatelů do zdrojů budou velmi nízké. V takovém případě bude se vycházet při umístění zdrojů jen z přepravních nákladů mezi zákazníky a umístěnými zdroji. Ve dvoustupňové lokační úloze (anglicky *Two-echelon location problem*) jsou vstupující a vystupující toky do a ze zdrojů stejně důležité a při budoucím umístění zdrojů se berou oba v potaz. V takovém případě se v modelu musí počítat s omezeními, které mají vyvážit vstupující a vystupující tok.

Lokační úlohy se taky liší podle dopravních prostředků, které budou komodity v modelu přepravovat ze zdrojů do zákazníků. Pokud v modelu se budou používat dopravní prostředky stejného typu, jedná se tehdy o homogenní lokační model. Jestli se využívá několik typu dopravních prostředků, tak je to heterogenní lokační model. Kapacita dopravních prostředků je taky velmi důležitá pro budoucí umístění zdrojů v území. V závislosti na tom, zda kapacita dopravního prostředku může uspokojit požadavky minimálně dvou zákazníků při jedné jízdě nebo jen jednoho, se pro řešení lokačních úloh používají různé modely a různé výpočetní metody.

Dalším významným prvkem lokační úlohy je zkoumané území. Území v lokačních úlohách se dělí podle toho kde lze umístit zdroj. Nejčastěji se území v úloze udává pomocí dopravních sítí reprezentovaných pomocí grafů s orientovanými nebo neorientovanými hranami a zdroje lze umístit jen ve vrcholech nebo na hranách nebo kdekoli v libovolném místě grafu reprezentujícího danou dopravní síť.

Podrobnější rozdělení lokačních úloh podle území bude probráno v následující podkapitole.

2.3 Základní kategorizace lokačních úloh podle kontinuity území vhodného pro rozmíst'ování zdrojů

Lokační úlohy podle možného umístění zdrojů v prostoru lze rozdělit na tři skupiny:

- diskrétní lokační úlohy,
- spojité lokační úlohy,
- síťové lokační úlohy.

Diskrétní lokační úloha je základní lokační úloha, která má velký význam ve praxi. Síť ve zkoumaném prostoru je tvořená konečným počtem zákazníků s předem daným požadavkem a konečným počtem vhodných lokalit pro umístění zdrojů pro uspokojení požadavků zákazníků. Diskrétní lokační úlohu je vhodné využít v těch případech, jestli se v úloze vyskytují objekty jako zastávky VD, letiště, přístavy, střediska záchranných zdravotnických služeb, továrny, sklady a maloobchodní prodejny.

V případě spojitých lokačních úloh lze zdroje umístit kdekoliv ve zkoumaném prostoru. Umístění zdrojů se popisuje prostřednictvím spojitých veličin, nejčastěji pomoci dvou základních souřadnic. Spojité modely jsou vhodné pro přibližný odhad potřebného počtu zdrojů a jejich přibližného umístění. Spojité modely však mají i své nevýhody. Nepříliš detailní popis zkoumaného prostoru může vygenerovat řešení, ve kterém bude zdroj umístěn v místě, kde toto umístění není možné (například uprostřed vodní plochy nebo na místě existující stavby). Další nevýhodou je obtížnost výpočtu zejména pro úlohy s umístěním více než jednoho zdroje.

Síťové lokační úlohy se nachází mezi spojitými a diskrétními úlohami a počítají s možným umístěním zdrojů v uzlech a na hranách sítě.

Ještě před tím, než začneme se zabývat lokačními úlohy podrobněji, seznámíme se s matematickou formulací obecné spojitě lokační úlohy a zmíníme některé poznatky z lineárního programování, s jehož využitím probíhá řešení lokačních úloh.

2.4 Lineární programování

Lineární programování je část matematického programování, které se zabývá problémy zaměřené na hledání vázaných extrémů lineárních funkcí více proměnných, přičemž účelová funkce je lineární a omezující podmínky mají tvar lineárních rovnic a nerovnic. Dalšími součástmi

matematického programování je programování celočíselné, kvadratické a dynamické. Společně s teorií her, teorií grafů, teorií hromadné obsluhy a teorií zásob je matematické programování jednou z nejvýznamnějších oblastí operačního výzkumu, jelikož má široké uplatnění při optimalizaci a řešení ekonomických, logistických, vojenských a celé řady dalších organizačních problémů [4, 23].

Nejvýznamnější částí matematického programování je lineární programování. Lineární programování, analogicky jako každá část matematického programování, má své výhody a nevýhody. Na rozdíl od některých jiných typů výpočetních metod jednou ze zásadních výhod lineárního programování je nacházení optimálního řešení. Další její výhodou je snadnost porozumění jeho základním principům, relativně jednoduchý postup vytvoření matematického modelu a běžná dostupnost výpočetního software (např. doplněk Řešitel v MS Excel). Nevýhodou je však občas složitost nebo vůbec nemožnost vytvoření některých omezení, vazeb nebo kritérií v matematické formulaci modelu a výpočetní náročnost rozsáhlých úloh, vedoucí v mnoha případech až k tomu, že výpočetní proces není možno v disponibilní době nebo s disponibilní výpočetní technikou zdárně ukončit.

Jako začátek rozvoje lineárního programování je považováno období Druhé světové války zejména vztahu s potřebami armády a vojáků, nicméně první pokusy vytvoření modelu lze dohledat již v 18. století, kdy se francouzský ekonom Francoise Quesnaye snažil zobrazit vzájemný vztah statkářů, sedláků a řemeslníků právě pomocí soustavy lineárních rovnic. V letech 1826 – 1888 problémy lineárního programování řešil teoretický fyzik J. B. Fourier, který se taky snažil je využít v analytické mechanice a v teorii pravděpodobnosti.

Na přelomu 19. a 20. století vznikla Farkasova teorie soustavy lineárních nerovnic, která byla vytvořená na základě prací Fouriera a následně zkoumána vědci H. Minkowským a C. Carathéodorym.

V roce 1975 dostali za rozvoj lineárního programování a jeho ekonomické aplikace Nobelovou cenu za ekonomii ruský matematik L. V. Kantorovič a ekonom Koopmans. Právě kniha L.V.Kantoroviče „*Mathematical Methods in the Organization and Planning of Production*“ je jednou z prvních prací o lineárním programování.

Zakladatelem lineárního programování je považován americký matematik George B. Danzig, který je tvůrcem základního algoritmu pro řešení úloh lineárního programování, což je simplexová metoda. Metoda se jmenuje simplexová podle simplexu, což je n -rozměrné zobecnění trojúhelníku, po kterém se pohybujeme při řešení úlohy lineárního programování. Algoritmus je založen na principu přechodu mezi jednotlivými bazickými přípustnými body až do nalezení optimálního řešení nebo zjištění, že úloha má nekonečně mnoho nebo žádné řešení. Můžeme si to představit tak, že algoritmus vybírá hranu, podél které se zlepšuje hodnota účelové funkce, a po té hraně se pak přesouvá z jednoho vrcholu do jiného, ve kterém je hodnota

účelové funkce lepší z hlediska posuzovaného kritéria. Tato metoda, i když byla navržena ještě v roce 1947, se dodnes používá pro řešení problémů lineárního programování a je pojmenována jako jeden z nejlepších algoritmů minulého století v oblasti optimalizačních metod.

Skutečný rozmach lineárního programování nebo taky lineární optimalizace jako matematické disciplíny je silně vázán na rozvoji výpočetní techniky. Rozvoj výpočetní techniky přinesl s sebou nejen nové studie, které se zabývaly lineárním programováním, ale i nové výpočetní algoritmy, které vzhledem k náročnosti simplexové metody, byly efektivnější, výpočetně rychlejší, a proto také s postupujícím časem využívanější. Mezi tyto nové postupy patří například metoda vnitřních bodů z roku 1979 a metoda elipsoidů z roku 1979.

K nejčastěji uváděným aplikačním úlohám, které se řeší metodami lineárního programování, patří:

- Problém jídelníčku, který byl vytvořen během 2.světové války a měl za cíl vytvořit levný ale přitom nutričně výživný jídelníček pro vojáky. Přibližné řešení tohoto problému nabídl laureát Nobelovy ceny z ekonomie George Stigler.
- Přiřazovací model, který byl řešen v 30. letech 20.století, a měl za cíl vytvořit co nejefektivnější páry objektů z různorodých skupin. Příkladem přiřazovacího modelu může být přiřazení zaměstnanců ke strojům pro zkrácení času na zaučení pracovníků. Řešení tohoto problému vychází z kombinatorických úvah a výsledný algoritmus pro řešení se jmenuje Maďarská metoda.
- Dopravní problém, který byl formulován ještě na konci 18.století francouzským matematikem Gaspardem Mongem, ale byl vyřešen jen v roce 1930 A. N. Tolstojem a následně matematikem Hitchcockem. Spolu s přiřazovacím problémem je dopravní úloha speciálním druhem úloh lineárního programování.
- Řezný problém, který má za cíl rozdělit disponibilní materiál na kusy jiné velikosti s ohledem na nějaké kritérium, kterým může být například minimalizace nákladů na zakoupení materiálu, maximalizace konečného zisku nebo minimalizace množství materiálu zbylého po rozdělení. Nejčastěji pak v úloze existují omezení ve velikosti konečných kusů nebo nabídce původního materiálu. Výsledkem řešení daného problému je řezný plán, který udává způsoby rozdělení původního materiálu na kusy požadované velikosti.

V následující kapitole podrobněji rozebereme postup a zásady formulace úloh lineárního programování s následujícím příkladem pro lepší pochopení vytváření matematického modelu, jelikož se stejným způsobem byly vytvářeny modely lokačních úloh, kterými se budeme zabývat dál.

2.4.1 Matematická formulace úlohy lineárního programování

Matematickou formulaci úlohy lineárního programování tvoří soustava algebraických výrazů, které vyjadřují optimalizační kritérium a omezení, která mají být v průběhu řešení dodržena. Jelikož každá úloha se vyznačuje jinou optimalizovanou veličinou a jiným počtem a charakterem omezení, nemůže existovat univerzální matematická formulace, která by byla vhodná pro každou úlohu lineárního programování. Co ovšem existuje, je doporučený postup pro vytváření matematického tvaru různých problémů.

Vytváření matematického modelu úlohy vychází přednostně z formulace problému. Správná a podrobná formulace problému musí obsahovat informaci o optimalizačním kritériu a omezeních, a kromě toho také informace o vstupech do modelu a požadovaných výstupech z řešení. Při neúplné formulaci problému může se stát, že výsledky nebudou uspokojivé pro zadavatele nebo nejsou platné, jelikož nebyly zohledněné všechna existující omezení.

Úloha lineárního programování je tvořena účelovou funkcí

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j \quad (1)$$

jejíž hodnota se minimalizuje nebo maximalizuje v závislosti na typu optimalizované veličiny a množinou lineárních rovnic a nerovnic

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (2)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad i = k + 1, \dots, m \quad (3)$$

$$x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (4)$$

reprezentujících reálná omezení, která se vyskytují v modelu.

Koeficienty a_{ij} v úlohách lineárního programování obvykle představují strukturální koeficienty. Koeficienty b_i jsou kapacitní koeficienty, které nejčastěji udávají limit, který máme dodržet. Koeficienty c_j se vzhledem ke své obvyklé interpretaci v úlohách lineárního programování nazývají cenové koeficienty, jelikož účelová funkce nejčastěji má za cíl minimalizaci nákladů nebo maximalizaci zisku což je přímo spojené s určitými peněžními prostředky. Proměnné x_j jsou součástí vektoru X , který je řešením úlohy lineárního programování.

Pro lepší pochopení vytvoření modelu lineárního programování využijeme příklad úlohy o maximalizaci zisku z produkce. Představme si, že existuje firma na výrobu produktu 1

a produktu 2. Pro zjednodušení předpokládejme, že na výrobu obou produktů jsou zapotřebí 2 typy surovin a lidská práce. Zisk z jedné jednotky produktu 1 je 45 Kč a z jedné jednotky produktu 2 je 10 Kč. K výrobě jedné jednotky produktu 1 je potřeba 100 jednotek suroviny 1, 20 jednotek suroviny 2 a 25 minut práce. K výrobě jedné jednotky produktu 2 je potřeba 15 jednotek suroviny 1, 5 jednotek suroviny 2 a 5 minut práce. Zdroje, potřebné k výrobě produktů, jsou v každém dni limitované a není možno je zvyšovat. Maximální množství suroviny 1, kterou můžeme za den použít, je 3 000 jednotek. Maximální množství suroviny 2 je 700 jednotek za den a disponibilní denní čas výroby je 480 minut. Firma má pouze jednoho zaměstnance.

Jaký by měl být optimální denní výrobní plán takové firmy, aby maximalizovala zisk z prodeje produktů?

Nejdříve je potřeba vytvořit matematický tvar úlohy. Jelikož se ptáme na optimální denní plán výroby obou produktů, zavedeme dvě proměnné, jejichž hodnoty budou odpovídat řešení dané úlohy lineárního programování. Nechť t je počet jednotek produktu 1 a s je počet jednotek produktu 2 vyprodukovaných za den. Vzhledem k tomu, že máme za cíl maximalizovat zisk z výroby dvou produktů a známe zisk z každé jednotky obou produktů můžeme zapsat optimalizační kritérium ve tvaru:

$$\max f(t, s) = 45t + 10s \quad (5)$$

Dále se můžeme zaměřit na tvorbu omezení. Prvním omezením je omezení týkající se nepřekročení množství suroviny 1, které na jeden den činí 3 000 jednotek. Se znalostí jednotkové spotřeby suroviny 1 na každou jednotku produkce můžeme sestavit první omezení:

$$100t + 15s \leq 3\,000 \quad (6)$$

Pro toto omezení, analogicky jako i pro ostatní, využíváme znak menší nebo rovno, protože při produkci nesmí být překročen denní limit suroviny 1 s tím, že každodenní spotřebu suroviny se snažíme přiblížit k limitní hodnotě a můžeme dosáhnout stejného využití jako je denní limit.

Následujícím omezením je omezení týkající se nepřekročení denního množství suroviny 2, což je 700 jednotek. Se znalostí jednotkové spotřeby suroviny 2 na každou jednotku produkce můžeme sestavit druhé omezení:

$$20t + 5s \leq 700 \quad (7)$$

Posledním omezením je omezení týkající se dodržení pracovní doby, v daném případě toto omezení vytvoříme stejným způsobem jako v případě předchozích dvou:

$$25t + 5s \leq 480 \quad (8)$$

Poslední omezení vymezují definiční obory proměnných :

$$t \geq 0 \quad (9)$$

$$s \geq 0 \quad (10)$$

V daném případě využíváme znak větší nebo rovno, jelikož firma nemůže vyrábět záporné počty výrobků. Ve skutečnosti můžeme záporné počty výrobků z ekonomického hlediska chápat jako výkup hotových výrobků u jiné firmy, ale takovou variantu v daném případě využívat nebudeme.

Matematická formulace dané úlohy o maximalizaci zisku z produkce bude vypadat následovně:

$$\max f(t, s) = 45t + 10s \quad (6)$$

za podmínek:

$$100t + 15s \leq 3000 \quad (7)$$

$$20t + 5s \leq 700 \quad (8)$$

$$25t + 5s \leq 480 \quad (9)$$

$$t \geq 0 \quad (10)$$

$$s \geq 0$$

Na stejném principu se vytváří většina modelů lokačních úloh včetně všech zkoumaných lokačních úloh v dané diplomové práci.

2.5 Matematická formulace obecné spojitě lokační úlohy

Jak už bylo zmíněno výše, spojitá lokační úloha je nejčastěji popsána pomocí soustavy souřadnic nebo přesněji řečeno polohy zákazníků a budoucí polohy zdrojů se udávají dvěma souřadnicemi X a Y . Umístění zdrojů v území není omezené přesně danou množinou vhodných lokalit a vychází výhradně z vhodnosti daného umístění pro uspokojení požadavků maximálního počtu zákazníků. Danou vhodnost budeme chápat jako blízké umístění daného zákazníka k přidělenému zdroji. Protože je potřeba pracovat v rámci dané úlohy s hodnotami vzdáleností, vzniká nová veličina, kterou budeme značit d_{ij} a bude to vzdálenost zákazníka Z_j , kde $j \in J$ od lokality L_i , kde $i \in I$.

Obecný model spojitě lokační úlohy také počítá s neomezenou kapacitou umístěných zdrojů, ale předpokládá se v něm, že požadavek zákazníka může být uspokojen více než jedním umístěným zdrojem.

Vzhledem k této skutečnosti budeme v daném modelu počítat s hodnotami požadavků zákazníků, které se značí b_j , kde $j \in J$. Jelikož předpokládáme, že zákazník může být obsloužen

více než jedním zdrojem, musíme vytvořit proměnnou, která bude udávat část požadavku zákazníka, kterou uspokojí určitý zdroj. Tuto proměnnou budeme značit x_{ij} a je to podíl požadavku zákazníka Z_j , kde $j \in J$, uspokojeného zdrojem v lokalitě L_i , kde $i \in I$. Kromě toho tyto proměnné budou sloužit i jako váhy v daném modelu a jejich cílem bude, aby zdroje, které jsou umístěny co nejbliž k zákazníkům, uspokojovaly co možná největší část jejich požadavků. Právě proto účelovou funkci modelu tvoří hodnoty dané vynásobením vzdálenosti mezi zákazníky a zdroji a jejich váhami.

Cílem modelu je umístit zdroje ve zkoumaném území tak, aby se minimalizovala celková vzdálenost mezi umístěními zdroji a k nim přiřazenými zákazníky s ohledem na váhy v modelu. [20]

Matematický model obecné spojité lokační úlohy lze zapsat následovně :

$$\min f(x) = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} d_{ij} x_{ij} \quad (11)$$

za podmínek:

$$\sum_{i \in I} x_{ij} = b_j \quad \text{pro } j \in J \quad (12)$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad \text{pro } i \in I, j \in J \quad (13)$$

Funkce (11) je účelovou funkcí modelu a reprezentuje součet vzdálenosti mezi zákazníky a k nim přiřazeným zdrojům s ohledem na váhy v modelu, kterými jsou podíly požadavků zákazníků uspokojené zdroji. Skupina podmínek (12) zajišťuje aby každý požadavek zákazníka byl uspokojen. Počet podmínek (12) se rovná počtu zákazníků. Skupina podmínek (13) udává definiční obor proměnných. Počet podmínek (13) se rovná součinu počtů lokalit a zákazníků.

Celkový počet omezujících podmínek modelu se rovná $|J| + |I||J|$.

2.6 Metody pro řešení spojitých lokačních úloh

Řešení spojitých lokačních úloh je velmi výpočetně složitý proces. Nejčastěji se pro jejich řešení používá princip pokrytí území. V modelu je pak definovaná obslužná vzdálenost, která je buď úplně stejná pro všechny možné zdroje v lokalitách nebo je pro každý zdroj přidělena individuálně. Jestli zákazník se nachází ve vzdálenosti menší nebo rovné než obslužná vzdálenost zdroje, tak to znamená, že tento zákazník je pokryt daným zdrojem a bude jim obslužen. Při tom existuje hodně různých strategií umístění zdrojů v lokalitách. Probereme čtyři základní:

- při maximálním pokrytí se umísťují zdroje tak, aby pokryly maximální počet zákazníků;
- při plném pokrytí se umísťují zdroje s největšími obslužnými vzdálenostmi;
- při prázdném pokrytí se umísťují zdroje tak aby nepokrývaly žádný další objekt v území (jestli se jedná například o podnik, který pracuje s výbušninami);
- při minimálním pokrytí se umísťují zdroje tak aby pokrývaly minimální počet dalších objektů.

K řešení spojitých lokačních úloh byla navržena celá řada výpočetních metod, které můžeme rozdělit na exaktní a heuristické. První skupina exaktních metod je složena z větší části výčtovými metody (anglicky *enumeration methods*) a algoritmy založenými na principu větví a hranic (anglicky *Branch-and-Bound algorithms*) [10]. Jsou vhodné pro nalezení optimálního řešení úlohy, ale je u nich omezena velikost řešeného problému. Důvodem je značná spotřeba výpočetního času, a to i u případů s malou rozlohou zkoumaného území. To znamená, že exaktní metody výpočtů spojitých lokačních úloh lze jen využívat u úloh s malým počtem zákazníků a omezeným územím při dodržování v daném případě přijatelné hodnoty výpočetního času.

Druhou skupinou metod pro výpočet spojitých lokačních úloh jsou heuristické metody, které jsou ještě doplněné metaheuristikami a hybridními metodami. Heuristické metody generují vhodné výsledky, které mohou ale nemusí být optimálním řešením zkoumaných úloh. Tato skupina metod může řešit úlohy libovolného rozměru a zvládá i velké, těžké nepolynomiální problémy (anglicky *NP-hard problems*).

Prvním algoritmem použitým pro řešení spojitých lokačních úloh je Algoritmus střídavého umístění-přiřazení (anglicky *the alternate location-allocation algorithm*). Tento heuristický algoritmus navrhl L. Cooper v roce 1964. I přesto, že tato heuristika nemůže garantovat nalezení optimálního řešení, je i dodnes velmi populární, jelikož algoritmus má vhodnou strukturu pro řešení spojitých lokačních úloh a zajišťuje nalezení lokálního optima.

Jinou metodu pro řešení spojitých lokačních úloh navrhli vědci M. B. Teitz a P. Bart v roce 1968 a metoda je založena na střídání zdrojů v lokalitách v diskretizovaném území. Rychlejší verzi této metody, která je velmi vhodná pro hledání lokálního optimálního řešení, představili M. G. C. Resende a F. W. Renato v roce 2007. L. A. N. Loren a E. L. F. Senne, které v roce 2003 navrhli pro řešení kapacitních spojitých lokačních úloh Lagrangean lokální hledací heuristiku (anglicky *Lagrangean/surrogate local search heuristics for capacitated p-median problems*). Metody jsou založeny na postupném střídání umístění vrcholů a hran v území do té doby, dokud se neukáže zlepšení stávajícího stavu. Vědci E. Durmaz, N. Aras a I. K. Altinel v roce 2008 vytvořili tři různé heuristiky pro řešení spojitých lokačních modelů, které jsou založené na diskrétní aproximaci problému s náhodným umístěním zákazníků uvnitř zkoumaného území. Jejich aproximace se získávají určením kandidátských bodů na umístění zdrojů v území pomocí lineárního celočíselného programování.

Jiným typem metod pro řešení spojitých lokačních úloh jsou metaheuristiky, které jsou schopné najít lepší výsledky ve srovnání s prostými heuristickými metodami. Jejich hlavním rozdílem od heuristických algoritmů je hledání řešení v celém zkoumaném území, protože heuristiky se často omezují jen na určité lokální řešení. Metaheuristické algoritmy zahrnují několik druhů metod, jako jsou simulované žíhání (anglicky *simulated annealing SA*), vyhledávání Tabu (anglicky *Tabu search TS*), variabilní hledání sousedství (anglicky *variable neighborhood search VNS*), genetické algoritmy (anglicky *genetic algorithm GA*) [NEEMA], variabilní hledání sousedství dekompozicí (anglicky *variable neighborhood decomposition search VNDS*) a vyhledávání řešení na principu neuronových sítí (anglicky *neural networks NN*). V roce 2000 vědci J. Brimberg, P. Hansen, N. Mladenovic a E. D. Taillard experimentálně dokázali, že metoda VNS dává lepší výsledky ve většině případů než ostatní metody.

Posledním typem metod, které se používají pro řešení spojitých lokačních úloh, jsou hybridní algoritmy. V poslední době se zvýšilo použití daných metod pro nalezení řešení, které je přibližně shodné s optimálním řešením nejen u spojitých, ale i u mnoha jiných různých druhů lokačních úloh. V roce 1997 S. Karu představil hybridní algoritmus, který byl vytvořen na základě optimalizace a metody větví a hranic, a vede k exaktnímu řešení v úloze s 287 zákazníky a 100 vhodnými lokalitami pro umístění zdroje. Tato metoda se často používá pro určení efektivnosti heuristických metod. Vědci M. S. Jabalameli a A. Ghaderi v roce 2008 představili tři hybridní algoritmy, které v sobě slučují metody heuristiky, jako GA a VNS, a lokální vyhledávání (anglicky *local search LS*) pro nalezení řešení, které je blízké optimálnímu. Tyto algoritmy ukazují lepší řešení než metody GA a VNS, které byly velmi dlouhou dobu považovány za nejlepší metody pro řešení spojitých lokačních úloh. V roce 2011 vědci M. N. Neema, K. M. Maniruzzaman a A. Ohgai prokázali, že hybridní algoritmy ukazují mnohem lepší výsledky s menšími výpočetními úsilími než jiné metody.

Jednou z cest, jak řešit spojitě lokační úlohy, je jejich diskretizace. Tohoto přístupu bude využito v předložené diplomové práci a bude představen v experimentální části této práci. Proces diskretizace vyzkoušíme na několika různých spojitých lokačních úlohách, které budou popsány v dalších kapitolách. Za účelem vysvětlení procesu diskretizace a znázornění základního tvaru lokační úlohy, v následující kapitole bude diskretní lokační úloha zformulována.

2.7 Matematická formulace obecné diskretní lokační úlohy

Obecný tvar lokační úlohy s neomezenou kapacitou zdrojů (v odborné literatuře se často používá anglický název *Uncapacitated Facility Location Problem*) můžeme definovat následovně[18,27]:

$$\min f(x, y) = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_{ij} x_{ij} + \sum_{i \in I} f_i y_i \quad (14)$$

za podmínek:

$$\sum_{i \in I} x_{ij} = 1 \quad \text{pro } j \in J \quad (15)$$

$$x_{ij} \leq y_i \quad \text{pro } i \in I, j \in J \quad (16)$$

$$y_i \in \{0,1\} \quad \text{pro } i \in I \quad (17)$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \quad \text{pro } i \in I, j \in J \quad (18)$$

Funkce (14) je účelovou funkcí modelu a zahrnuje náklady spojené s obsluhou zákazníků ze zdrojů v lokalitách a náklady vyplývající z umístění zdrojů v lokalitách. Skupina podmínek (15) zajišťuje přiřazení každého zákazníka k jednomu zdroji pro následující uspokojení požadavků zákazníků. Bez této skupiny podmínek by požadavky zákazníků nebyly uspokojeny, jelikož účelová funkce má za cíl minimalizaci celkových nákladů, jejichž součástí jsou i náklady na obsluhu. Počet podmínek (15) se rovná počtu zákazníků. Skupina podmínek (16) je skupinou vazebních podmínek, které mají dva hlavní cíle. Z jedné strany zajišťují, aby zákazníci byli obslouženi jen z otevřených zdrojů, z jiné strany taky zajišťují, aby fixní náklady na umístění zdroje v lokalitě se započítaly do účelové funkce pouze tehdy, když zdroji bude přiřazen některému ze zákazníků. Počet podmínek (16) se rovná součinu počtu lokalit a zákazníků. Skupiny podmínek (17) a (18) jsou obligatorní podmínky, které udávají definiční obory proměnných. Počet podmínek (17) se rovná počtu lokalit a počet podmínek (18) se rovná součinu počtů lokalit a zákazníků.

Celkový počet omezujících podmínek modelu se rovná $|I| + |J| + 2|I||J|$.

Vzhledem k popisu zkoumaného území prostřednictvím soustavy souřadnic s následujícím použitím diskretizaci území není možné použít v daném případě obecný model diskrétní nebo spojitě lokační úlohy a je potřeba využít model, který minimalizuje hodnoty vzdálenosti mezi zdroji a zákazníky.

2.8 Lokační modely s umístováním pozitivních zdrojů na síti

Začátek hledání polohy absolutního centra a absolutního mediánu na síti připadá na druhou polovinu 20. století, kdy odborníci v oboru optimalizace se pokoušeli najít optimální umístění pro ústředny (anglicky „switching center“) v komunikační síti a policejní stanice v dopravní síti

[11]. Ve výsledků se ukázalo, že tyto dva problémy, i když zní docela podobně a připadají identické, jsou ve skutečnosti různé a k jejich řešení je potřeba přistupovat zcela odlišným způsobem. Probereme podrobněji oba uvedené problémy.

Ve starších komunikačních systémech, jejichž zástupcem je telefonní propojovací systém, musel vždy existovat prvek propojení, který budeme nazývat ústředna S . Všechny hovory, které byly na síti, musely projít ústřednou před tím než byly propojeny se svou konečnou destinací. Takovým způsobem se vytvářel konečný graf G , ve kterém uzly reprezentovaly telefonní stanice a hrany reprezentovaly vedení přenášející signál mezi jednotlivými stanicemi. V takovém grafu vždy muselo kromě toho existovat ohodnocení hran nebo uzlů nebo i hran i uzlů současně. Ohodnocení hran reprezentovalo skutečnou délku propojení nebo náklady na jednotku kapacity. Ohodnocení uzlů reprezentovalo počet hran, kterými měl projít signál do nebo z ústředny v závislosti na tom zda daný uzel je počátečním nebo koncovým pro daný signál. Cílem tohoto modelu bylo najít vhodné umístění ústředny tak, aby celková délka hran, kterými procházejí hovory z uzlů do ústředny a naopak byl minimální.

Problém optimálního umístění policejních stanic nebo nemocnic je, jak už bylo zmíněno dříve, docela podobný předchozímu problému. Rozdíl spočívá ale v tom, že jedná se o veřejně přístupná místa, která by se měla nacházet od obyvatelstva v co nejbližší vzdálenosti pro snadnou dostupnost všem občanům. Vzhledem k umístění obyvatel v území tedy na dopravní síti je potřeba umístit zkoumaný zdroj servisu tak aby minimalizovat maximální vzdálenost mezi zdrojem a nejbližším obyvatelem.

Absolutní centrum v grafu G můžeme definovat jako bod x_0 , který může ale nemusí být uzlem v daném grafu, a jeho maximální vzdálenost do každého jiného uzlu není větší než maximální vzdálenost do uzlů libovolného jiného bodu v síti. Matematicky můžeme tento vztah zapsat takto:

$$\max_{1 \leq i \leq n} d(v_i, x_0) \leq \max_{1 \leq i \leq n} d(v_i, x) \quad (19)$$

kde v_i jsou uzly v grafu G a $d(v_i, x_0)$ je vzdálenost mezi uzlem a zkoumaným bodem.

Absolutní medián v grafu G můžeme definovat jako bod y_0 , jehož celková vzdálenost mezi ním a všemi ostatními uzly, není větší než celková vzdálenost mezi uzly a libovolným jiným bodem na síti. Matematicky můžeme tento vztah zapsat takto:

$$\sum_{i=1}^n d(v_i, y_0) \leq \sum_{i=1}^n d(v_i, y) \quad (20)$$

kde v_i jsou uzly v grafu G a $d(v_i, y_0)$ je vzdálenost mezi uzlem a zkoumaným bodem.

Z uvedeného plyne, že pro hledání optimálního umístění ústředny v komunikační síti je vhodné použít absolutní medián grafu a pro hledání optimálního umístění takových středisek obsluhy

jako nemocnice, policejní stanice, prvky integrovaného záchranného systému lze použít absolutní centrum.

2.8.1 Matematická formulace lokační úlohy typu p medián

Pro experimenty se spojitou lokační úlohou byl zvolen model nazývaný v odborné anglické literatuře jako *p-median problém*. V daném typu úlohy je nutné umístit určitý počet zdrojů v území tak, aby součet vzdáleností mezi umístěnými zdroji a k nim přiřazenými zákazníky byl minimální. Tento model není kapacitně omezený a nepracuje ani s hodnotami požadavků zákazníků, ani s fixními náklady na zprovoznění zdrojů v lokalitách. Objevuje se tady nová konstanta, která se značí p , a která bude reprezentovat zvolený počet zdrojů, které je potřeba v území umístit [13]. Konstanta d_{ij} jako i v obecném modelu spojitě lokační úlohy reprezentuje vzdálenost mezi lokalitou L_i a zákazníkem Z_j .

Za účelem rozhodnutí o umístění zdroje $i \in I$ v lokalitě L_i , kde $i \in I$, se často používá bivalentní proměnná y_i . Pokud je $y_i = 1$, potom je zdroj umístěn v lokalitě L_i , kde $i \in I$, pokud je $y_i = 0$, potom zdroj není umístěn v lokalitě L_i , kde $i \in I$. Pro reprezentování přiřazení zákazníka Z_j , kde $j \in J$, ke zdroji umístěnému v lokalitě L_i , kde $i \in I$ se zavádí další bivalentní proměnná x_{ij} . Pokud je $x_{ij} = 1$, potom je zákazník Z_j , kde $j \in J$, obslužen ze zdroje umístěném v lokalitě L_i , kde $i \in I$, pokud je $x_{ij} = 0$, potom zákazník Z_j , kde $j \in J$, není obslužen ze zdroje umístěného v lokalitě L_i , kde $i \in I$.

Matematicky lze model zapsat ve tvaru:

$$\min f(x, y) = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} d_{ij} x_{ij} \quad (21)$$

za podmínek:

$$\sum_{i \in I} x_{ij} = 1 \quad \text{pro } j \in J \quad (22)$$

$$x_{ij} \leq y_i \quad \text{pro } i \in I, j \in J \quad (23)$$

$$\sum_{i \in I} y_i = p \quad (24)$$

$$y_i \in \{0, 1\} \quad \text{pro } i \in I \quad (25)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \text{pro } i \in I, j \in J \quad (26)$$

Funkce (21) je účelovou funkcí modelu a reprezentuje součet vzdáleností mezi zákazníky a k nim přiřazeným zdrojům. Skupina podmínek (22) zajišťuje, aby každý zákazník byl přiřazen

jen k jednomu zdroji. Počet podmínek (22) se rovná počtu zákazníků. Skupina podmínek (23) je skupinou vazebních podmínek a zajišťuje, aby zákazníci byli obslouženi jen z otevřených zdrojů. Počet podmínek (23) se rovná součinu počtů lokalit a zákazníků. Skupina podmínek (24) zajišťuje, aby počet umístěných zdrojů v území se rovnal zvolenému počtu. Počet podmínek (24) je jedna. Skupiny podmínek (25) a (26) jsou obligatorní podmínky, které udávají definiční obory proměnných. Počet podmínek (25) se rovná počtu lokalit a počet podmínek (26) se rovná součinu počtů lokalit a zákazníků.

Celkový počet omezujících podmínek modelu se rovná $1 + |I| + |J| + 2|I||J|$.

Skupinu podmínek (23) lze zobrazit ještě v jiném tvaru:

$$\sum_{j \in J} x_{ij} \leq ny_i \quad \text{pro } i \in I \quad (27)$$

Konstanta n udává počet zákazníků. Levá strana podmínky reprezentuje celkový počet zákazníků přiřazených ke každému zdroji a pomocí konstanty n tento počet může se rovnat nebo být menší než celkový počet zákazníků. To znamená, že teoreticky všechny zákaznicky mohou být přiděleny k jednomu zdroji a v daném modelu se otevře jen jeden zdroj. Bez konstanty n na pravé straně podmínky ke každému zdroji by mohl být přiřazen maximálně jeden zákazník, což není žádoucí s hlediska minimalizace nákladů a takové omezení se v lokačních úlohách běžně nevyskytuje. Analogicky tato podmínka zajišťuje, aby zákazníci byli přiřazováni jen k otevřeným zdrojům.

Ve srovnání se skupinou podmínek (23) je tato skupina podmínek výpočetně náročnější, ale její výhodou je i menší počet, který se rovná počtu lokalit.

Při využití skupiny podmínek (27) místo (23) se celkový počet omezujících podmínek modelu bude rovnat $1 + 2|I| + |J| + |I||J|$.

2.8.2 Matematická formulace lokační úlohy typu p centrum

Následujícím modelem, kterým byl zvolen za účelem experimentování a je v určitém slova smyslu opakem modelu p -medián, je model p -centrum. Jak již bylo popsáno výše, model p -centrum má za cíl umístit určitý počet zdrojů ve zkoumaném území tak aby maximální vzdálenost mezi zákazníkem a k němu přiřazeným zdrojem byla minimální. Analogicky jako i v modelu p -medián, v daném případě rovněž nebudeme počítat s nákladovou složkou modelu a s omezením kapacity zdrojů a zaměříme se pouze na optimální umístění zdrojů vzhledem ke vzdálenostem. Nově vzniklá proměnná z reprezentuje maximální vzdálenost

mezi zákazníkem a k ní přiděleným zdrojem a právě hodnotu této proměnné budeme v modelu minimalizovat [9,17].

Matematický lze model zapsat ve tvaru:

$$\min f(x, y, z) = z \quad (28)$$

za podmínek:

$$\sum_{i \in I} d_{ij} x_{ij} \leq z \quad \text{pro } j \in J \quad (29)$$

$$\sum_{i \in I} x_{ij} = 1 \quad \text{pro } j \in J \quad (30)$$

$$x_{ij} \leq y_i \quad \text{pro } i \in I, j \in J \quad (31)$$

$$\sum_{i \in I} y_i = p \quad (32)$$

$$y_i \in \{0,1\} \quad \text{pro } i \in I \quad (33)$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \quad \text{pro } i \in I, j \in J \quad (34)$$

$$z \geq 0 \quad (35)$$

Funkce (28) je účelovou funkcí modelu a reprezentuje maximální vzdálenost mezi zákazníky a k nim přiřazenými zdroji. Skupina podmínek (29) vytváří spojení mezi účelovou funkcí a přiřazením zákazníků ke zdrojům v lokalitách. Počet podmínek (29) se rovná počtu zákazníků. Skupina podmínek (30) zajišťuje aby každý zákazník byl přiřazen právě jednomu zdroji. Počet podmínek (30) se rovná počtu zákazníků. Skupina podmínek (31) je skupinou vazebních podmínek a zajišťuje aby zákazníci byli obslouženi jen z otevřených zdrojů. Počet podmínek (31) se rovná součinu počtů lokalit a zákazníků. Skupina podmínek (32) zajišťuje, aby počet umístěných zdrojů v území se rovnal zvolenému počtu. Počet podmínek (32) je 1. Skupiny podmínek (33), (34) a (35) jsou obligatorní podmínky, které udávají definiční obory proměnných. Počet podmínek (33) se rovná počtu lokalit, počet podmínek (34) se rovná součinu počtů lokalit a zákazníků a počet podmínek (35) je jedna.

Celkový počet omezujících podmínek modelu se rovná $2 + |I| + 2|J| + 2|I||J|$.

Analogicky jako v úloze typu p -medián lze i zde přepsat skupinu podmínek (31) úspornějším ale výpočetně náročnějším způsobem:

$$\sum_{j \in J} x_{ij} \leq n y_i \quad \text{pro } i \in I \quad (36)$$

V takovém případě se celkový počet omezujících podmínek modelu bude rovnat $2 + 2|I| + 2|J| + |I||J|$.

2.9 Lokační úlohy s umístováním nežádoucích zdrojů na síti

Většina lokačních úloh má za cíl umístit v území objekty, které mají uspokojit nějaké požadavky v území nebo prostě přinášejí obyvatelstvu určitý pozitivní užitek, jako například sklady, obslužná centra nebo nemocnice. V takových případech zdroje mají přímý nebo nepřímý vztah ke zákazníkům v území prostřednictvím ujeté vzdálenosti. Cílem je najít vhodná umístění pro tyto zdroje s ohledem na nutnou budoucí ujetou vzdálenost. Ale existují i takové objekty, jejichž vliv na okolní obyvatelstvo je buď pozitivní pouze částečně nebo je zcela nežádoucí (anglicky *undesirable facilities*). Příkladem takových zdrojů mohou být jaderné elektrárny, vojenská zařízení, skládky odpadu nebo vězení. Tento typ objektů je taky nutný pro fungování společnosti, i přesto že přináší negativní vlivy na okolní území svého umístění jako např. znečištění ovzduší, vyšší riziko hrozeb nebo vyvolává vyšší úroveň nespokojeností nebo obav u obyvatel. A proto se k umístění takových objektů v území musí zacházet vždy velmi opatrně a pečlivě.

I když ve většině lokačních úloh hlavním kritériem umístění zdrojů v území jsou právě cestovní náklady, při umístění nežádoucích zdrojů tato situace neplatí a negativní účinek zdroje na obyvatele bude mít vždy větší prioritu. Například při umístění skládky odpadu většina obyvatel území by odmítla umístění, které jen minimalizuje dopravní náklady, jelikož tak by se zhoršily podmínky života obyvatel v blízkém okolí. V důsledku toho je nejvhodnějším umístěním skládky odpadu okrajové oblasti, jejichž poloha umožňuje na jednu stranu minimalizovat náklady na dopravu a současně také odstraní negativní dopad zdroje na území. Stejný princip rozhodnutí o umístění nežádoucích zdrojů můžeme například vidět i u francouzské vlády, která ještě na konci 20. století umísťovala většinu jaderných elektráren podél atlantického pobřeží pro ochranu svých občanů před negativními důsledky elektráren se ztrátou části energie na přenos a zvýšenými dopravními náklady.

Pro řešení úloh o umístění nežádoucích zdrojů v území se nejčastěji používají dvě metody [7]. První z nich je použití dolní hraniční vzdálenosti mezi zákazníkem a zdrojem. To znamená, že každý zákazník by měl definovanou zakázanou oblast (anglicky *forbidden zone*) ve které se nesmí nacházet nežádoucí zdroj. Jinou metodou je využití maximalizační funkce, jako například maximalizace průměrné nebo minimální vzdálenosti mezi zákazníky a zdroji. I když obě metody jsou vhodné pro řešení takového druhu problému, větší pozornosti dosáhla právě metoda maximalizace.

Přesto, že historie umístění nežádoucích zdrojů v území je přibližně stejně dlouhá jako historie umístění žádoucích zdrojů, prvními vědci, které zkoumali maximalizaci minimální vzdálenosti, byli Goldman a Dearing v roce 1975. Důvodem této skutečnosti může být to, že lidé vnímají nežádoucí účinek jako důsledek vzniku nových technologií a rozvíjející se industrializace. Příkladem takových zdrojů jsou jaderné reaktory, elektrárny, odpadkové skládky nebo obrovská letiště, která se začala objevovat právě na přelomu 20. a 21. století.

Jako jiné vysvětlení pozdního rozvoje studií o lokalizaci nežádoucích zdrojů se nabízí také přesvědčení, že žádoucích zdrojů je mnohem více než nežádoucích. To ovšem taky úplně neodpovídá pravdě, jelikož již v roce 1989 časopis *TIME* provedl průzkum, který ukázal, že lidé vnímají jako nežádoucí zdroj basketbalová hřiště, spalovny, servisní jednotky a další na první pohled neobtěžující objekty.

Ale teprve širší pochopení skutečných negativních účinků vedlo na konci 20. století jakož i v současné době ke zvýšení zájmu o optimalizaci umístění nežádoucích zdrojů v území. Je však nutno zdůraznit, že při procesu rozhodování o optimálním rozmístění nežádoucích objektů musí být spolupracováno s dalšími obory a subjekty jako jsou i politikové, na jejichž rozhodnutí v dané oblasti závisí celkový rozvoj úloh o umístění nežádoucích zdrojů a jejich využití.

Při práci s modelem lokační úlohy o umístění nežádoucích zdrojů je potřeba v první řadě pochopit, jaké vstupní hodnoty máme a s jakými účelovými funkcemi budeme pracovat. Analogicky jako u lokačních úloh pro umístění žádoucích zdrojů v jednom modelu můžeme mít více než jednu účelovou funkci, které mohou být jako maximalizační tak i minimalizační. Jak už bylo zmíněno výše, v úlohách na umístění nežádoucích zdrojů se snažíme maximalizovat buď průměrnou nebo minimální vzdálenost mezi zdrojem a zákazníkem. Ale vzhledem k povaze zdrojů může vznikat i další kritérium a to buď minimalizace nebo maximalizace vzdálenosti nežádoucích zdrojů mezi sebou. Například jestli budeme umísťovat v území zdroje, které mohou způsobit nějakou katastrofu doprovázenou následujícími explozemi nebo uvolňováním nebezpečných látek, tak umístění takových zdrojů u sebe může vést ke zvětšení hrozby rozšíření nebezpečné situace v území z jednoho zdroje do druhého. V takovém případě bude snaha taky o maximalizaci vzdálenosti mezi zdroji. Z jiné strany se v oboru hornictví naopak místa těžby nacházejí blízko jeden druhému. A to nejen kvůli tomu, že zdroje surovin se obvykle kumulují v jednom místě oblasti, ale také proto, že po těžbě surovin území přestává být úrodné a je snaha uchovat co nejvíce zemí v její původním stavu. Úlohy, které počítají se dvěma a více kritérii, nazýváme vícekritériální úlohy a v případě nežádoucích zdrojů můžeme se snažit nejen optimalizovat umístění zdrojů, ale taky pracovat s fixními náklady na umístění zdrojů v lokalitách jelikož se jedná nejčastěji o specifické objekty, které potřebují určité množství technického vybavení, a proto vyvolávají vysoké počáteční náklady.

Jako už bylo zmíněno výše větší pozornosti pro řešení úloh umístění nežádoucích zdrojů dosáhla metoda maximalizačního kritéria. Existuje dva druhy maximalizačních funkcí: maxisum a maximin. Funkce maximin má za cíl maximalizovat minimální vzdálenost mezi obyvateli a nežádoucími zdroji. Funkce maxisum má za cíl maximalizovat součet vzdáleností mezi obyvateli a k nim nejbližšími nežádoucími zdroji. To znamená, že úlohy maximin jsou obdobou úloh p -centrum a úlohy maxisum jsou obdobou úloh p -medián s tím rozdílem, že se jedná o nežádoucí zdroje a je potřeba maximalizovat vzdálenosti.

Úlohy maximin jsou více vhodné pro použití v případě, kdy je potřeba umístit nové nežádoucí středisko v území, kde zákazníků není hodně. Úlohy maxisum se naopak používají v územích které jsou hustě obydlené obyvatelstvem a umístěný nežádoucí zdroj v jakémkoliv případě bude velmi blízko nějakým zákazníkům. Analogicky, úlohy maximin jsou pomocné při rozhodnutích o umístěních jen s ohledem na vzdálenost mezi obyvateli a nežádoucími zdroji. Úlohy maxisum se naopak používají v případech, kdy posuzujeme umístění nežádoucích zdrojů ne jen z hlediska umístění zákazníků, ale také z umístění jiných nežádoucích zdrojů, tedy pokud se jedná o vícekritériální lokační úlohu.

První snahou vyřešit maximin problém s umístěním jednoho nežádoucího zdroje v území bylo využití Karushových-Kuhnových-Tuckerových podmínek pro hledání optimálního řešení mezi místními optimy [26]. Tento postup navrhli v roce 1980 vědci B. Dasarathy a L.J. White, které se snažili dívat na tento problém jako na opak tehdy velmi rozšířeného pokrývacího problému. Vědci E. Melachrinoudis a T. P. Cullinane v roce 1985 změnili metodu Dasarathyho a Whiteho pro řešení maximin problému s přidělenými váhy u obyvatel území. V roce 1981 se vědci P. Hansen, D. Peeters a J. F. Thisse snažili řešit model s umístěním jednoho nežádoucího zdroje ještě s ohledem na náklady, které zobrazovaly obtížnost daného zdroje pro různé obyvatele území. Všechny metody, které byly zmíněny výše, se používají jen pro nekonvexní území.

V roce 1983 vědci Z. Drezner a G. O. Wesolowsky vytvořili dvě první metody pro řešení maximin úloh pro umístění jednoho zdroje v konvexním území. První z nich je založen na binárním hledání optimálního řešení z geometrického pohledu. Druhá metoda je založená na rozdělení zkoumaného území na čtverce nebo obdélníky pomocí svislých a vodorovných čar, které byly nakresleny skrz každý existující bod. Podobně jako Z. Drezner a G. O. Wesolowsky se vědci E. Melachrinoudis a T. P. Cullinane taky zabývali oběma typy problému, a navrhli metodu řešení maximin problému pro umístění jednoho zdroje s váhami, které udávali počty obyvatel v území.

Na rozdíl od problému maximin problém maxisum nebyl natolik podrobně zkoumán a tedy nemá velkou různorodost metod pro řešení. Vědci R. L. Church a R. S. Garfinkel se v roce 1978 snažili dokázat, že u maxisum úloh pro umístění jednoho zdroje s váhami, které udávali počty obyvatel v území, existuje jen velmi omezený počet lokalit vhodných pro umístění nežádoucích zdrojů.

E. Minieka v roce 1983 se pokoušel prokázat stejnou věc u úloh bez vah pomocí hledání tzv. anti-mediánů.

Maxisum a maximin problémy pro umístění více než jednoho nežádoucího zdroje v území se v literatuře často nazývají p -disperze problémy (anglicky *p-dispersion problem*). Pro řešení maximin p -disperze problému vědci R. Chandrasekaran a A. Daughety v roce 1981 používali anti-pokrývací metodu pro dosažení maximální vzdálenosti s jakou je možné zdroje od sebe oddálit a to s použitím určité limitní vzdálenosti, za kterou bylo lze umísťovat další nežádoucí zdroje. V roce 1982 vědci B. C. Tansel, R. L. Francis, T. J. Lowe a M. L. Chen pro řešení maximin p -disperze problému využili opačný přístup metodě řešení $(p - 1)$ -centrum problému. E. Erkut v roce 1987 vytvořil pro řešení maximin problému bez určitých hranic v území algoritmus založený na principu větví a hranic. V roce 1985 Z. Drezner a G. O. Wesolowsky se snažili vyřešit daný problém ještě s přidáním vah k obyvatelům území.

Analogicky jako v případě úloh o umístění jednoho nežádoucího zdroje v území, maxisum p -disperze problémy nemají velkou různorodost metod na řešení. V roce 1988 vědci P. Hansen a I. D. Moon prezentovali postup řešení s využitím Lagrangeovy funkce. E. Erkut, T. Baptie a B. Hohenbalken v roce 1988 navrhli metodu na základě větví a hranic a heuristiku na hledání dolní hraniční vzdálenosti u obyvatel při umístění nežádoucích zdrojů.

V následujících kapitolách budou uvedeny modely úloh maxisum a maximin p -disperze.

2.9.1 Matematická formulace lokační úlohy typu maxisum p -disperze

Jak už bylo zmíněno výše, model maxisum p -disperze má za cíl umístit určitý počet nežádoucích zdrojů v území tak, aby součet vzdálenosti těchto umístěných zdrojů od všech obyvatel byl maximální. V daném modelu, analogicky jako v modelech p -medián a p -centrum, budeme pracovat s proměnnými y_i a x_{ij} , jelikož v daném případě budeme taky přiřazovat otevřené nežádoucí zdroje ke sídelním útvarům, na které budou mít největší negativní vliv. Stále taky platí, že je potřeba umístit v území p nežádoucích zdrojů.

Matematický lze model zapsat ve tvaru:

$$\max f(x, y) = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} d_{ij} x_{ij} \quad (37)$$

za podmínek:

$$\sum_{i \in I} x_{ij} = 1 \quad \text{pro } j \in J \quad (38)$$

$$x_{ij} \leq y_i \quad \text{pro } i \in I, j \in J \quad (39)$$

$$\sum_{i \in I} y_i = p \quad (40)$$

$$y_i \in \{0,1\} \quad \text{pro } i \in I \quad (41)$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \quad \text{pro } i \in I, j \in J \quad (42)$$

Funkce (37) je účelovou funkcí modelu a reprezentuje součet vzdáleností mezi sídelními útvary a k nim přiřazenými nežádoucími zdroji. Skupina podmínek (38) zajišťuje, aby každý sídelní útvar byl přiřazen jen jednomu nežádoucímu zdroji. Počet podmínek (38) se rovná počtu sídelních útvarů. Skupina podmínek (39) je skupinou vazebních podmínek a zajišťuje, aby sídelní útvary byly obslouženy jen z otevřených nežádoucích zdrojů. Počet podmínek (39) se rovná součinu počtů lokalit vhodných pro umístění nežádoucích zdrojů a sídelních útvarů. Skupina podmínek (40) zajišťuje, aby počet umístěných nežádoucích zdrojů v území se rovnal zvolenému počtu. Počet podmínek (40) je jedna. Skupiny podmínek (41) a (42) jsou obligatorní podmínky, které udávají definiční obory proměnných. Počet podmínek (41) se rovná počtu lokalit vhodných pro umístění nežádoucích zdrojů a počet podmínek (42) se rovná součinu počtů lokalit vhodných pro umístění nežádoucích zdrojů a sídelních útvarů.

Celkový počet omezujících podmínek modelu se rovná $1 + |I| + |J| + 2|I||J|$.

2.9.2 Matematická formulace lokační úlohy typu maximin p -disperze

Model maximin p -disperze má za cíl umístit určitý počet nežádoucích zdrojů v území tak, aby vzdálenost sídelního útvaru k nejbližšímu nežádoucímu zdroji byla maximální. Analogicky jako v modelu p -centrum je v úloze zavedena proměnná z , která reprezentuje vzdálenost mezi zdroji a sídelními útvary a analogicky jako v předchozím modelu maximum budeme stále pracovat s proměnnými x_{ij} a y_i , jelikož bude probíhat proces přiřazení sídelních útvarů k nežádoucím zdrojům a výstup tohoto přiřazení právě bude přímo ovlivňovat hodnotu proměnné z .

Matematický lze model zapsat ve tvaru:

$$\max f(x, y, z) = z \quad (43)$$

za podmínek:

$$\sum_{i \in I} d_{ij} x_{ij} \geq z \quad \text{pro } j \in J \quad (44)$$

$$\sum_{i \in I} x_{ij} = 1 \quad \text{pro } j \in J \quad (45)$$

$$x_{ij} \leq y_i \quad \text{pro } i \in I, j \in J \quad (46)$$

$$\sum_{i \in I} y_i = p \quad (47)$$

$$y_i \in \{0,1\} \quad \text{pro } i \in I \quad (48)$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \quad \text{pro } i \in I, j \in J \quad (49)$$

$$z \geq 0 \quad (50)$$

Funkce (43) je účelovou funkcí modelu a reprezentuje minimální vzdálenost mezi sídelními útvary a k nim přiřazenými nežádoucími zdroji. Skupina podmínek (44) vytváří vazbu mezi účelovou funkcí a vzdálenostmi mezi sídelními útvary a nežádoucími zdroji, a to tak, že se vytváří dolní hranice pro minimální vzdálenost mezi sídelními útvary a zdroji. Počet podmínek (44) se rovná počtu sídelních útvarů. Skupina podmínek (45) zajišťuje, aby každý sídelní útvar byl přiřazen jen jednomu nežádoucímu zdroji. Počet podmínek (45) se rovná počtu sídelních útvarů. Skupina podmínek (46) je skupinou vazebních podmínek a zajišťuje, aby jen otevřené nežádoucí zdroje ovlivňovaly sídelní útvary. Počet podmínek (46) se rovná součinu počtů lokalit vhodných pro umístění nežádoucích zdrojů a sídelních útvarů. Skupina podmínek (47) zajišťuje aby počet umístěných zdrojů v území se rovnal zvolenému počtu. Počet podmínek (47) je jedna. Skupiny podmínek (48), (49) a (50) jsou obligatorní podmínky, které udávají definiční obory proměnných. Počet podmínek (48) se rovná počtu lokalit vhodných pro umístění nežádoucích zdrojů, počet podmínek (49) se rovná součinu počtů lokalit vhodných pro umístění nežádoucích zdrojů a sídelních útvarů a obyvatel a počet podmínek (50) je jedna.

Celkový počet omezujících podmínek modelu se rovná $2 + |I| + 2|J| + 2|I||J|$.

3 EXPERIMENTÁLNÍ ČÁST

3.1 Charakteristika zkoumaného území

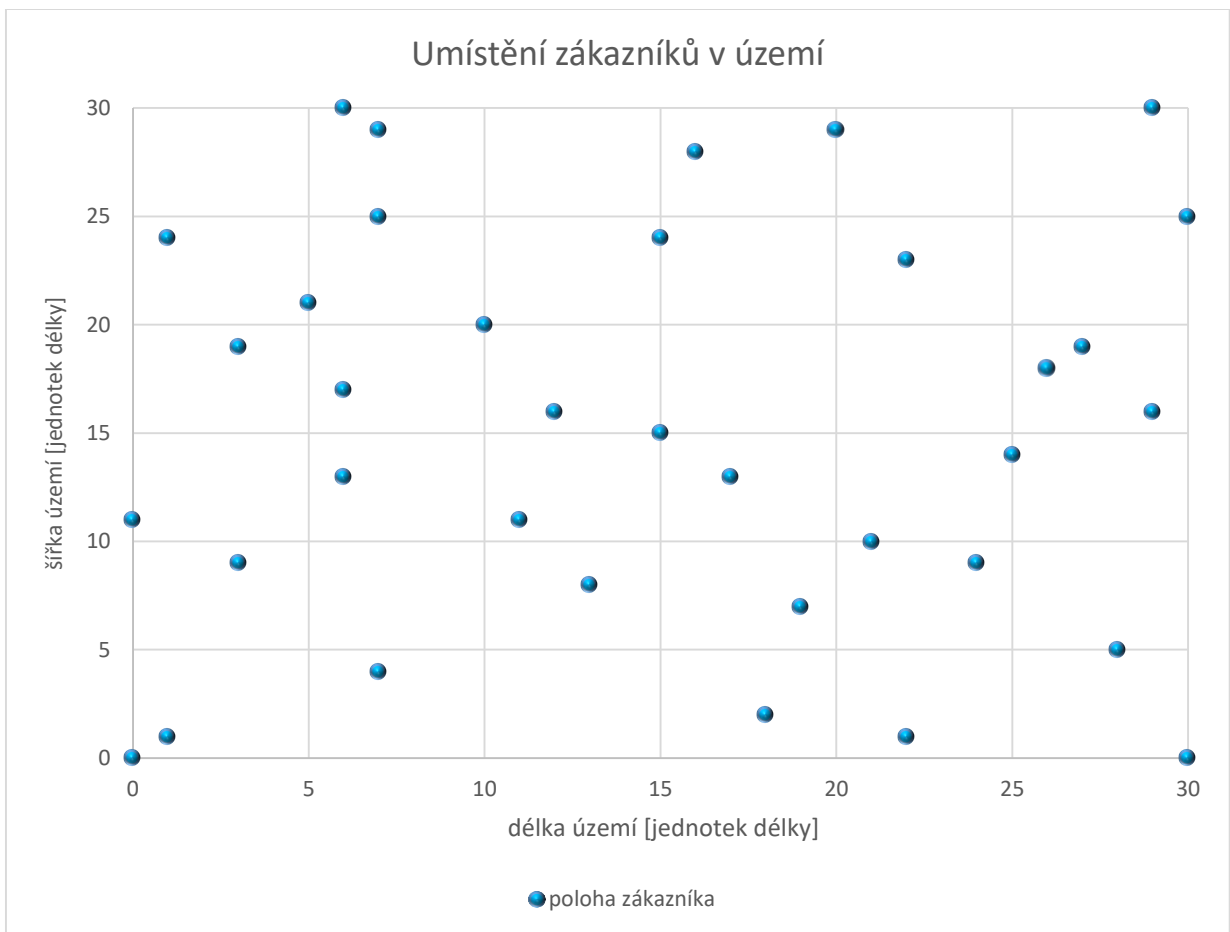
Základem každé spojité lokační úlohy je zkoumané území. Za účelem experimentování s časem výpočtu spojité lokační úlohy bylo vytvořené území čtvercového tvaru o velikosti 30 jednotek délky. Pro jednoduchost bude počítáno s tím, že dané území je homogenní, nejsou v něm žádná jezera, řeky nebo jiné geografické bodové či liniové prvky, které by omezovaly lokaci zdrojů na území. Analogicky předpokládejme, že kromě zákazníků se v území nebudou nenacházet jiné objekty, které nejsou součástí zkoumané úlohy. Jinými slovy, plocha celého území je celkově vhodná pro umístění zákazníků a zdrojů.

Následujícím bodem je umístění zákazníků na vytvořeném prostoru. Je logické umístit zákazníky po tomto území náhodně, jelikož toto odpovídá realitě, kde zákazníci nejsou umístěni systematicky v prostoru. Podle velikosti vytvořeného zkoumaného území byl zvolen počet zákazníků 36, čímž vzniká středně velká spojité lokační úloha. Polohy zákazníků a následně i polohy lokalit vhodných pro umístění zdrojů bude popisovat základní soustava souřadnic XY. Zvolené umístění zákazníků udává Tabulka č.1 a grafické znázornění jejich umístění zobrazuje Obrázek č. 2. Jak už bylo zmíněno výše, bude pracovat s nekapacitní verzí lokační úlohy a nebudeme zohledňovat požadavky zákazníků, tedy nebudou definovány hodnoty a_i a b_j .

Tabulka č. 1 – Umístění zákazníků v území (znázornění pomoci X a Y souřadnic)

bod	x	y	bod	x	y	bod	x	y
1	1	1	13	7	25	25	30	25
2	6	13	14	21	10	26	24	9
3	29	30	15	6	30	27	30	0
4	12	16	16	7	4	28	0	11
5	3	9	17	13	8	29	15	15
6	18	2	18	29	16	30	22	1
7	27	19	19	17	13	31	3	19
8	1	24	20	5	21	32	7	29
9	28	5	21	10	20	33	26	18
10	22	23	22	20	29	34	0	0

11	16	28	23	25	14	35	6	17
12	11	11	24	15	24	36	19	7



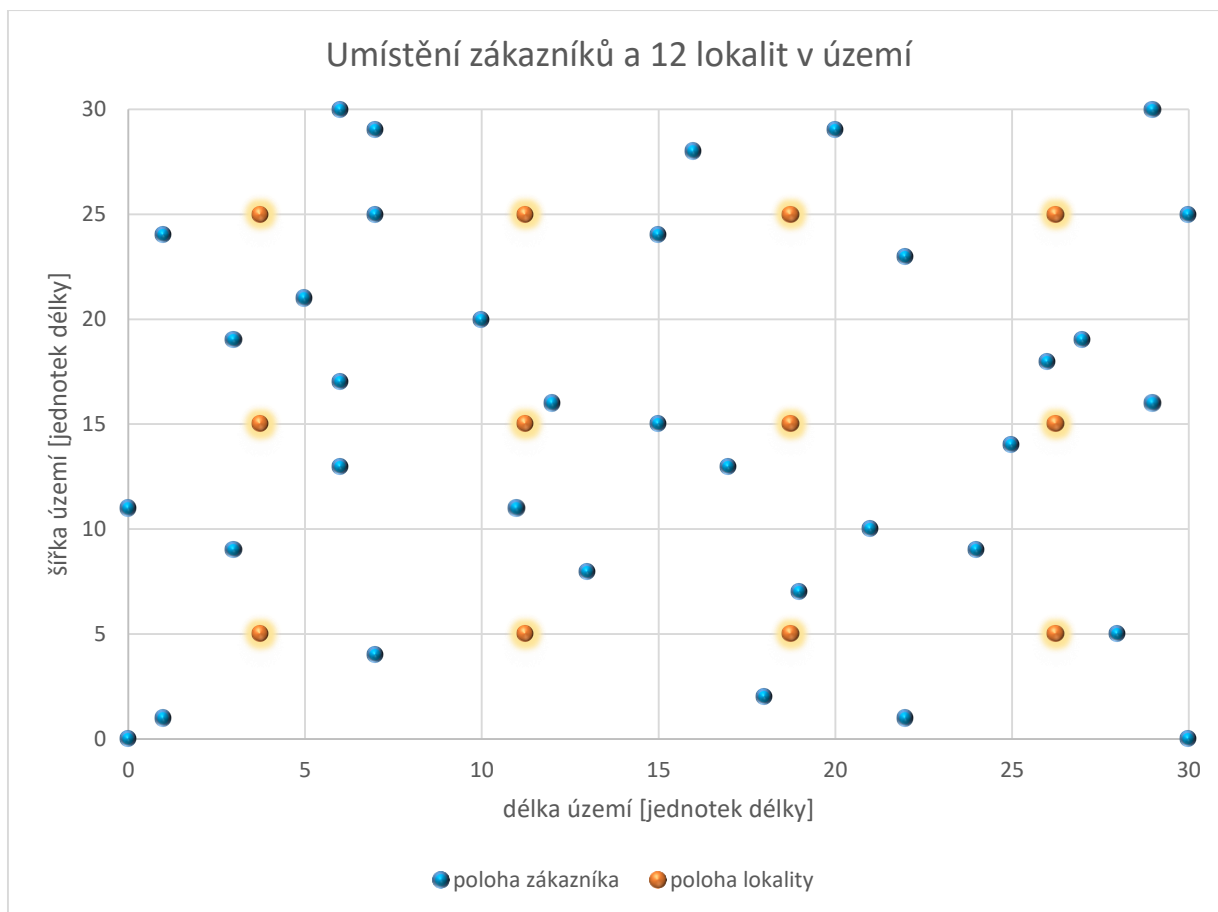
Obrázek č.2 – Umístění zákazníků v území (grafické znázornění)

V následujícím kroku je potřeba najít potenciálně vhodné lokality pro umístění zdrojů. V obecné spojitě lokační úloze mohou být zdroje umístěné v libovolném bodě na řešeném prostoru, ale v rámci své diplomové práce budu používat proces diskretizace území [6]. Diskretizace území je proces, kdy se zkoumané území dělí na určitý počet stejně velkých ploch nejčastěji ve tvaru čtverce nebo obdélníka podle zvoleného rozsahu diskretizace. Velikost diskretizace udává velikost dílčích ploch. Velikost diskretizace může být stejně velká jako pro výšku tak i pro délku rozdělených ploch, například velikost diskretizace 0.5, 3 nebo 5 délkových jednotek, ale může být i různá pro šířku a pro výšku, například jako dílčí plochy 0.5 délkových jednotek na šířku a 3 délkové jednotky na výšku. Diskretizaci území lze provádět buď za předpokladu určeného kroku diskretizaci s následujícím vznikem určitého počtu dílčích ploch nebo lze postupovat opačným směrem a provádět diskretizaci podle potřebného budoucího počtu dílčích ploch s následujícím určením kroku diskretizace.

V rámci diplomové práce budeme vycházet z předpokladu, že potenciálně vhodná lokalita na umístění zdroje bude jen jedna v každé dílčí ploše, která vznikne po diskretizaci území, a bude se umísťovat v těžišti každé dílčí plochy. Vzhledem ke zvolené velikosti území a počtu zákazníků budeme za účelem experimentování počítat s 1 až 18 dílčími plochami daného území, to znamená s 1 až 18 lokalitami vhodnými pro umístění zdroje. V diplomové práci budou vynechány případy, kdy počet dílčích ploch odpovídá prvočíslům 11, 13 a 17, jelikož vzhledem k tvaru a rozměrům území nebylo možné vytvořit dílčí plochy vhodné za účelem experimentování. Příkladem umístění 12 lokalit v území je následující Obrázek č. 3, což je grafické znázornění území s 12 lokalitami, souřadnice těchto 12 lokalit jsou uvedeny v Tabulce č.2.

Tabulka č. 2 – Umístění 12 lokalit v území (znázornění pomoci X a Y souřadnic)

bod	x	y	vrcholy plochy	dílčí	bod	x	y	vrcholy plochy	dílčí
1	3.75	5	[0,10] [0,0]	[7.5,10] [7.5,0]	7	18.75	15	[15,20] [15,10]	[22.5,20] [22.5,10]
2	11.25	5	[7.5,10] [7.5,0]	[15,10] [15,0]	8	26.25	15	[22.5,20] [22.5,10]	[30,20] [30,10]
3	18.75	5	[15,10] [15,0]	[22.5,10] [22.5,0]	9	3.75	25	[0,30] [0,20]	[7.5,30] [7.5,20]
4	26.25	5	[22.5,10] [22.5,0]	[30,10] [30,0]	10	11.25	25	[7.5,30] [7.5,20]	[15,30] [15,20]
5	3.75	15	[0,20] [0,10]	[7.5,20] [7.5,10]	11	18.75	25	[15,30] [15,20]	[22.5,30] [22.5,20]
6	11.25	15	[7.5,20] [7.5,10]	[15,20] [15,10]	12	26.25	25	[22.5,30] [22.5,20]	[30,30] [30,20]



Obrázek č. 3 – Umístění zákazníků a 12 lokalit v území (grafické znázornění)

Jako už bylo zmíněno výše v každém zkoumaném modelu budeme umísťovat p žádoucích nebo nežádoucích zdrojů. Za účelem experimentování bylo zvoleno, že v každém modelu hodnota p se bude rovnat polovině počtu lokalit vhodných na umístění zdrojů. To znamená, že v modelu s 12 vhodnými lokalitami na umístění zdrojů budeme hledat nejvhodnější umístění právě pro 6 zdrojů.

Základem popisu každého území a následujícího řešení spojité lokační úlohy je matice vzdáleností mezi zákazníky a lokalitami vhodnými pro umístění zdrojů. Rozměr matice se rovná vždy 36 řádkům podle počtu zákazníků v území a od 1 do 18 sloupcům podle počtu dílčích ploch a pochopitelně i lokalit. Pro určení matice vzdálenosti prostřednictvím systému souřadnic lze využít několik různých metrik. Existuje Manhattanská vzdálenost, Čebyševova vzdálenost, ale nejznámější z nich je euklidovská vzdálenost mezi dvěma body, která bude právě využita v rámci diplomové práce. Pro dva body $A(a_1, a_2)$ a $B(b_1, b_2)$ se euklidovská vzdálenost rovná [8] :

$$d(A, B) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2} \tag{51}$$

Tabulka č.3 znázorňuje distanční matici mezi 36 zákazníky a 12 lokalitami.

Tabulka č. 3 – Distanční matice pro 12 lokalit

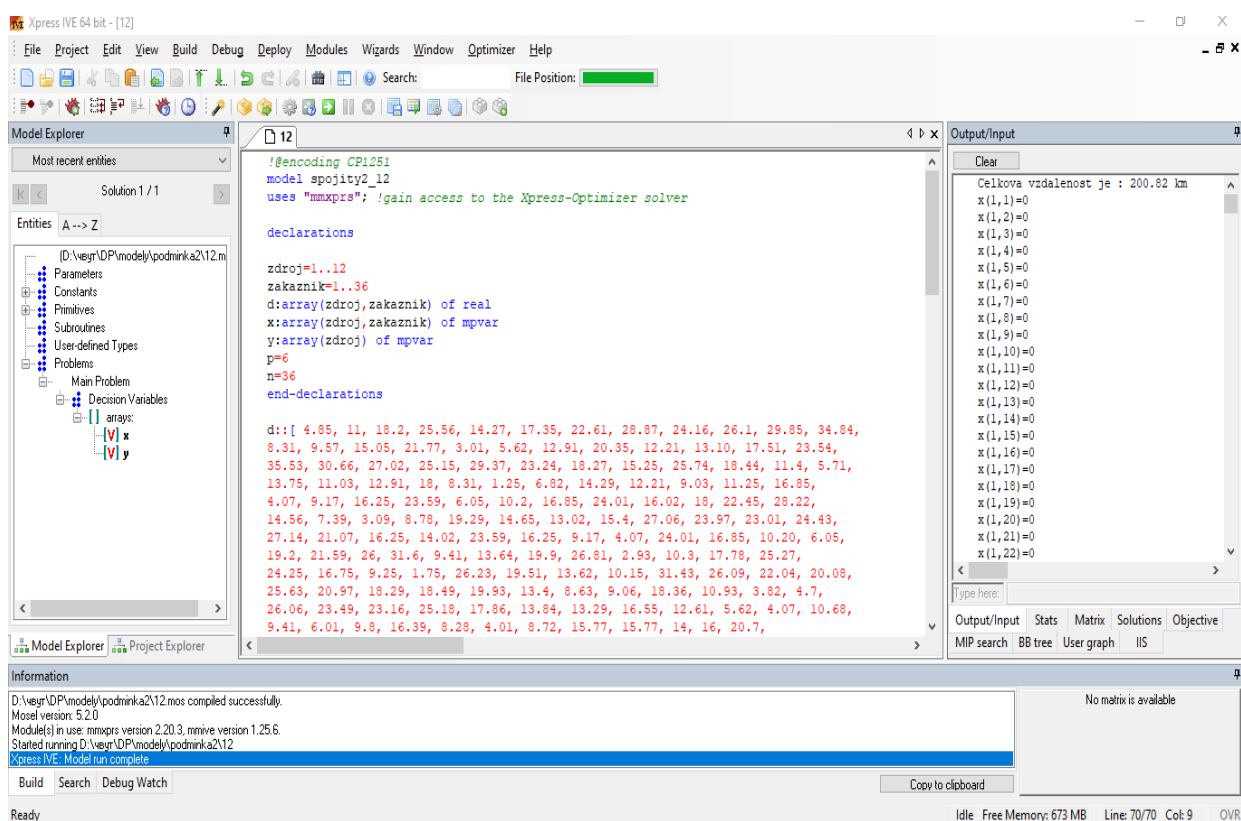
$d_{12,36}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	4.85	11.00	18.20	25.56	14.27	17.35	22.61	28.87	24.16	26.10	29.85	34.84
2	8.31	9.57	15.05	21.77	3.01	5.62	12.91	20.35	12.21	13.10	17.51	23.54
3	35.53	30.66	27.02	25.15	29.37	23.24	18.17	15.25	25.74	18.44	11.40	5.71
4	13.75	11.03	12.91	18.00	8.31	1.25	6.82	14.29	12.21	9.03	11.25	16.85
5	4.07	9.17	16.25	23.59	6.05	10.20	16.85	24.01	16.02	18.00	22.45	28.22
6	14.56	7.39	3.09	8.78	19.29	14.65	13.02	15.40	27.06	23.97	23.01	24.43
7	27.14	21.07	16.25	14.02	23.59	16.25	9.17	4.07	24.01	16.85	10.20	6.05
8	19.20	21.59	26.00	31.60	9.41	13.64	19.90	26.81	2.93	10.30	17.78	25.27
9	24.25	16.75	9.25	1.75	26.23	19.51	13.62	10.15	31.43	26.09	22.04	20.08
10	25.63	20.97	18.29	18.49	19.93	13.40	8.63	9.06	18.36	10.93	3.82	4.70
11	26.06	23.49	23.16	25.18	17.86	13.84	13.29	16.55	12.61	5.62	4.07	10.68
12	9.41	6.01	9.80	16.39	8.28	4.01	8.72	15.77	15.77	14.00	16.00	20.70
13	20.26	20.45	23.20	27.76	10.51	10.87	15.43	21.69	3.25	4.25	11.75	19.25
14	17.96	10.96	5.48	7.25	17.96	10.96	5.48	7.25	22.86	17.89	15.17	15.89
15	25.10	25.55	28.06	32.17	15.17	15.89	19.69	25.20	5.48	7.25	13.70	20.86
16	3.40	4.37	11.79	19.28	11.47	11.79	16.10	22.17	21.25	21.43	24.06	28.49
17	9.72	3.47	6.49	13.59	11.60	7.22	9.06	14.99	19.35	17.09	17.95	21.55
18	27.54	20.88	15.04	11.34	25.27	17.78	10.30	2.93	26.81	19.90	13.64	9.41
19	15.48	9.85	8.19	12.23	13.40	6.09	2.66	9.46	17.88	13.31	12.13	15.15
20	16.05	17.18	21.10	26.60	6.13	8.66	15.00	22.08	4.19	7.42	14.32	21.62
21	16.25	15.05	17.37	22.11	8.00	5.15	10.08	17.00	8.00	5.15	10.08	17.00
22	28.98	25.55	24.03	24.80	21.45	16.51	14.06	15.33	16.74	9.62	4.19	7.42
23	23.08	16.43	10.96	9.09	21.27	13.79	6.33	1.60	23.93	17.61	12.65	11.07
24	22.08	19.37	19.37	22.08	14.41	9.75	9.75	14.41	11.29	3.88	3.88	11.29
25	33.00	27.41	22.95	20.35	28.09	21.25	15.05	10.68	26.25	18.75	11.25	3.75
26	20.64	13.36	6.60	4.59	21.12	14.09	7.97	6.41	25.81	20.46	16.84	16.16
27	26.72	19.41	12.31	6.25	30.23	24.01	18.75	15.46	36.25	31.25	27.41	25.28
28	7.08	12.75	19.69	26.93	5.48	11.94	19.17	26.55	14.49	17.96	23.40	29.75
29	15.05	10.68	10.68	15.05	11.25	3.75	3.75	11.25	15.05	10.68	10.68	15.05
30	18.68	11.47	5.15	5.84	23.00	17.65	14.37	14.63	30.15	26.30	24.22	24.37
31	14.02	16.25	21.07	27.14	4.07	9.17	16.25	23.59	6.05	10.20	16.85	24.01
32	24.22	24.37	26.72	30.77	14.37	14.63	18.28	23.80	5.15	5.84	12.41	19.66
33	25.77	19.66	14.88	13.00	22.45	15.05	7.85	3.01	23.33	16.33	10.08	7.00
34	6.25	12.31	19.41	26.72	15.46	18.75	24.01	30.23	25.28	27.41	31.25	36.25
35	12.21	13.10	17.51	23.54	3.01	5.62	12.91	20.35	8.31	9.57	15.05	21.77
36	15.38	8.00	2.02	7.52	17.22	11.14	8.00	10.80	23.59	19.60	18.00	19.41

V průběhu experimentování se ukázalo, že stejný model se stejnými vstupními hodnotami, omezeními a účelovou funkcí se vypočítá po každé se stejným výsledkem ale s různým výpočetní dobou. Vzhledem k této skutečnosti budeme v následujících kapitolách, které ukazují výsledky jednotlivých modelů včetně výpočetních časů, posuzovat každý model z hlediska maximálního

výpočetního času a taky průměrného výpočetního času, který byl vypočten jako průměrná hodnota ze všech výpočetních časů daného modelu za dobu experimentování.

3.2 Řešení optimalizačních úloh pomocí software Xpress-IVE

Za účelem experimentování budeme používat optimalizační software Xpress-IVE. Tento software byl původně vytvořen společností Dash Optimization ale v roce 2008 byl koupen americkou společností FICO. Xpress-IVE se používá pro řešení optimalizačních úloh lineárního, kvadratického programování a pro matematické modelování. Programovacím jazykem v software Xpress-IVE je modelovací jazyk Mosel. Otevřená modulární architektura prostředí Xpress-IVE s využitím jazyku Mosel byla navržena tak, aby byla snadno rozšiřitelná, bez omezení na konkrétní typ problému nebo řešitele. Jazyk Mosel kromě toho dovoluje integrovat modely napsané tímto jazykem do aplikačních programů implementovaných v jazycích jako jsou C, C++, Java, C# a Visual Basic. Ukázku pracovního prostředí optimalizačního software Xpress-IVE zobrazuje Obrázek č.4. [XPRESS]



Obrázek č. 4 – Ukázka pracovního prostředí optimalizačního software Xpress-IVE

Analogicky jako například programovací jazyk C, má taky programovací jazyk Mosel určitá pravidla psaní textu programu, která je nutno dodržovat. Na začátku každého textu programu musí být uvedeno klíčové slovo *model*, které se následně doplňuje libovolným jednoslovným

názvem programu psaným bez diakritiky a ve druhém řádku je uveden příkaz *uses mmxprs*, který aktivuje knihovnu matematických operací. Dál následuje deklarační část textu programu, ve které se deklarují všechny proměnné, konstanty a indexy modelu. Označení „*array(...)* *of*“ se používá pro definování pole a v závorkách se udává rozsah pole. Pro označení pole konstant se využívá spojení „*real*“. Pole proměnných poznáme spojením „*mpvar*“. Deklarační část textu programu je vymezena na začátku klíčovými slovy „*declarations*“ a na konci „*end-declarations*“.

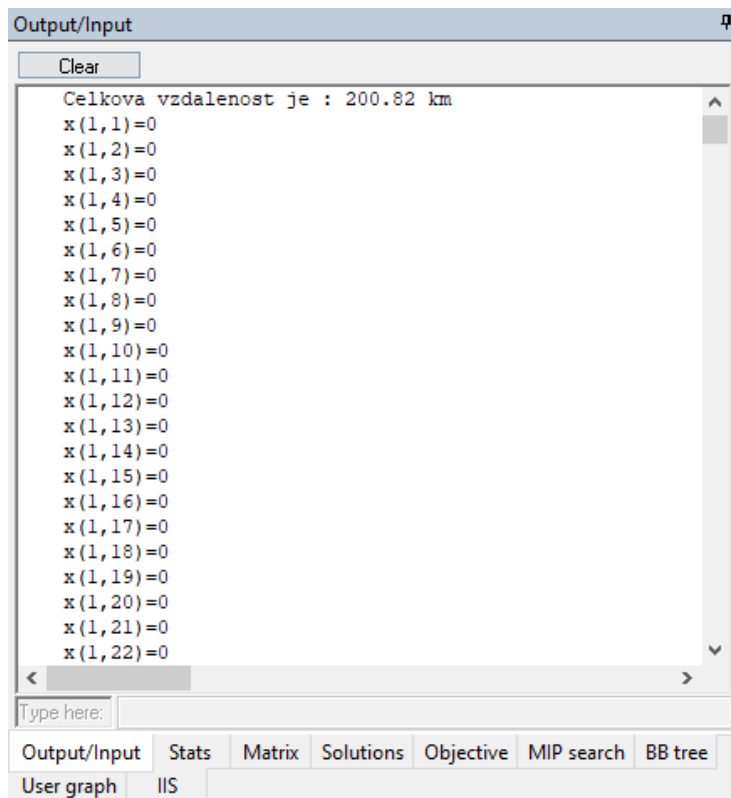
Dále následuje část zadání konstant modelu a všech omezujících podmínek, přičemž všechny konstanty, které se budou používat v omezeních, musí být zadány před prvním řádkem obsahujícím zápis první omezující podmínky. Pro definování skupiny podmínek se využívá příkaz *forall(i in index1, j in index2,...)*, kde *index1*, *index2*,... jsou indexy, které byly deklarované v deklarační části. Užitečným příkazem je taky příkaz *sum(i in index1, j in index2,...)*, který provádí součet přes zadané indexy. Spojení *is_binary* se využívá v tom případě, když pracujeme s bivalentní proměnnou.

Po zápisu všech omezujících podmínek následuje část s definováním účelové funkce, jejíž název volí řešitel. V závislosti na tom, zda se jedná o úlohu maximalizující nebo minimalizující účelovou funkci bude následovat řádek buď *maximize(nazev_ucelove_funkce)* nebo *minimize(nazev_ucelove_funkce)*. Dále se do textu programu zařazuje požadavek na výpis hodnoty účelové funkce a hodnot proměnných, který se zobrazuje v pravé části pracovního okna, pomocí příkazu „*writeln*“. Výpis hodnoty účelové funkce je zajištěn příkazem „*getobjval*“. Výpis hodnot proměnných je zajištěn příkazem „*getsol*“.

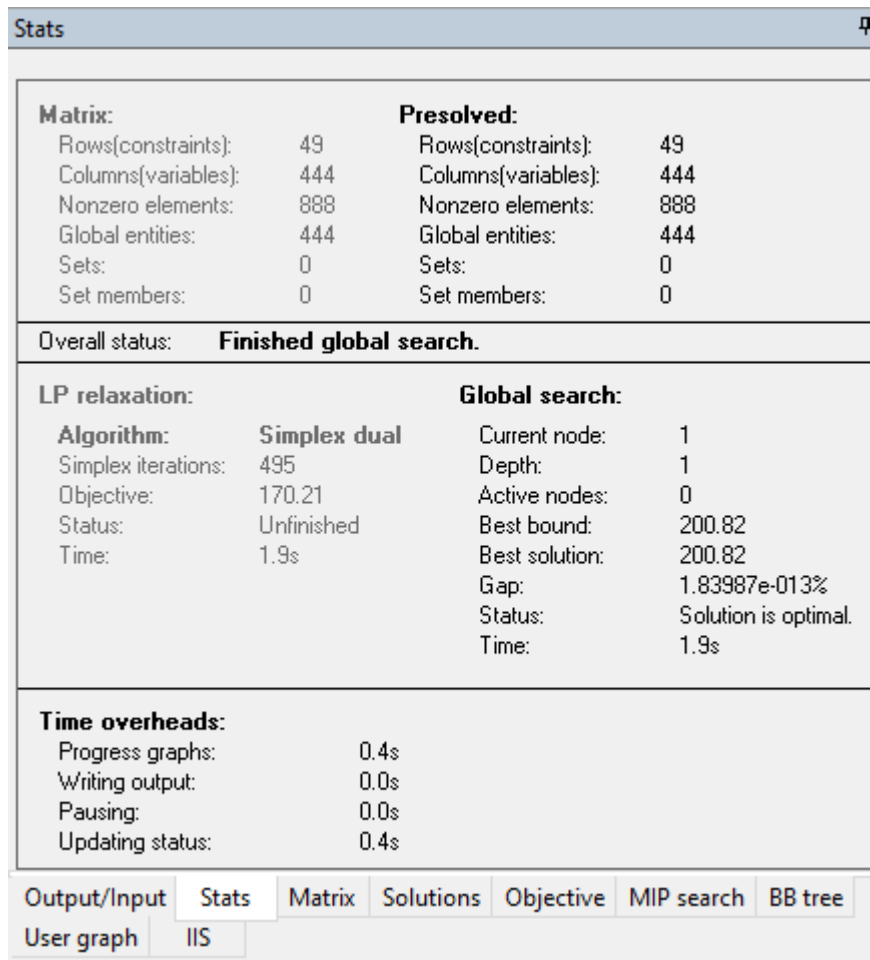
Konec textu programu je definován klíčovým slovem „*end-model*“.

Po zahájení optimalizačního výpočtu stisknutím tlačítka „*Run Model*“, software Xpress-IVE vyřeší model a zobrazí výpis požadovaných hodnot v části pracovního okna *Output/Input*, která se nachází obvykle na pravé straně pracovního prostředí. Část pracovního okna s výpisem výsledků je uvedena na Obrázku č. 5.

Záložka *Stats* udává podrobnější informace o samotném řešení daného modelu v software Xpress-IVE. Najdeme tam informace o počtu řádků a sloupců v daném modelu, počet entit, nejlepší řešení, status řešení, interval chyby a výpočetní časy. V řádku *Time*: najdeme výpočetní čas celého modelu, které jsou důležité pro výzkum závislosti výpočetního času na počtu lokalit vhodných pro umístění zdrojů a na typu vazební podmínky. Následující Obrázek č. 6 zobrazuje část pracovního prostředí záložky *Stats*.



Obrázek č. 5 – Záložka *Output/Input* software Xpress-IVE



Obrázek č.6 – Záložka *Stats* software Xpress-IVE

3.2.1 Text programu pro řešení úlohy typu p medián

V dalším textu práce bude uveden text programu pro variantu zkoumané spojité lokační úlohy s 12 zdroji a vazební podmínkou ve tvaru $\sum_{j \in J} x_{ij} \leq ny_i$

```
model median_2_12
uses "mmxprs"
declarations
zdroj=1..12
zakaznik=1..36
d:array(zdroj,zakaznik) of real
x:array(zdroj,zakaznik) of mpvar
y:array(zdroj) of mpvar
p=6
n=36
end-declarations
d::[]
forall(j in zakaznik)sum(i in zdroj)x(i,j)=1
forall(i in zdroj) sum(j in zakaznik)x(i,j)<=n*y(i)
sum(i in zdroj)y(i)=p
forall(i in zdroj)y(i)is_binary
forall(i in zdroj,j in zakaznik)x(i,j)is_binary
celkova_vzdalenost:=sum(i in zdroj,j in zakaznik)d(i,j)*x(i,j)
minimize(celkova_vzdalenost)
writeln("Celkova vzdalenost je : ",getobjval," km")
forall(i in zdroj,j in zakaznik)writeln("x(",i," ",j,")=" ,getsol(x(i,j)))
forall(i in zdroj)writeln("y(",i,")=" ,getsol(y(i)))
end-model
```

Řešením dané úlohy je :

Celkova vzdalenost je : 200.82 km

$x(2,5)=1$	$x(3,4)=1$	$x(4,22)=1$	$x(4,30)=1$	$x(5,19)=1$	$x(6,18)=1$
$x(2,6)=1$	$x(3,8)=1$	$x(4,23)=1$	$x(4,31)=1$	$x(5,33)=1$	$x(6,32)=1$
$x(2,7)=1$	$x(3,21)=1$	$x(4,24)=1$	$x(5,9)=1$	$x(6,1)=1$	$x(6,36)=1$
$x(2,13)=1$	$x(3,28)=1$	$x(4,25)=1$	$x(5,10)=1$	$x(6,2)=1$	$x(8,20)=1$
$x(2,17)=1$	$x(4,11)=1$	$x(4,26)=1$	$x(5,15)=1$	$x(6,3)=1$	$x(8,34)=1$
$x(2,27)=1$	$x(4,12)=1$	$x(4,29)=1$	$x(5,16)=1$	$x(6,14)=1$	$x(8,35)=1$
$y(2)=1$	$y(3)=1$	$y(4)=1$	$y(5)=1$	$y(6)=1$	$y(8)=1$

Následující dvě tabulky zobrazují výstupy experimentování s úlohou p -medián. První tabulka ukazuje výsledky při využití jednodušší podmínky (23). Druhá tabulka zobrazuje výsledky při využití skupiny podmínek (27). Dané tabulky obsahují informace ohledně počtu všech proměnných v modelu, počtu podmínek modelu, hodnoty účelové funkce a výpočetního času. Vzhledem k tomu, že výpočetní čas je závislý na mnoha okolnostech, jako počet proměnných matematického modelu, počet omezení, typ procesoru, velikost operační paměti, rychlosti počítače a nastavené aktualizace, budou v tabulce uvedeny maximální výpočetní časy, které byly dosažené během experimentování, a průměrné výpočetní časy, jejichž hodnoty se rovnají průměru z výpočetních časů. Za účelem experimentování byl použit počítač s procesem Intel(R) Celeron(R) CPU N2940 @ 1.83GHz, operační paměť 4.00 GB a operačním systémem Windows 10 Pro.

Tabulka č. 4 – Srovnání výpočetního času úlohy p -medián pro různý počet vhodných lokalit v území pro skupinu podmínek (23)

Počet lokalit	Počet proměnných y_i	Počet proměnných x_{ij}	Počet podmínek	Hodnota účelové funkce [vzdál. jedn.]	Výpočetní čas [s] – průměrný	Výpočetní čas [s] – maximální
1	1	36	110	443.76	0.75	1.40
2	2	72	183	491.30	0.95	2.00
3	3	108	256	460.13	0.80	1.80
4	4	144	329	324.80	1.30	2.80
5	5	180	402	344.88	0.83	1.60
6	6	216	475	289.65	0.80	1.50
7	7	252	548	249.15	1.13	2.70
8	8	288	621	246.00	1.38	3.10

9	9	324	694	240.19	1.03	2.50
10	10	360	767	236.48	1.13	2.30
12	12	432	913	200.82	0.85	1.60
14	14	504	1059	175.05	0.95	2.00
15	15	540	1132	179.00	0.90	1.90
16	16	576	1205	162.24	1.20	2.30
18	18	648	1351	145.12	1.53	3.30

Tabulka č. 5 – Srovnání výpočetního času úlohy p -medián pro různý počet vhodných lokalit v území pro skupinu podmínek (27)

Počet lokalit	Počet proměnných y_i	Počet proměnných x_{ij}	Počet podmínek	Hodnota účelové funkce [vzdál. jedn.]	Výpočetní čas [s] - průměrný	Výpočetní čas [s] - maximální
1	1	36	74	443.76	1.15	2.30
2	2	72	113	491.30	1.95	4.50
3	3	108	151	460.13	1.25	3.80
4	4	144	189	324.80	2.58	5.50
5	5	180	227	344.88	1.68	4.50
6	6	216	265	289.65	1.70	5.00
7	7	252	303	249.15	1.58	4.10
8	8	288	341	246.00	1.78	4.60
9	9	324	379	240.19	1.15	2.20
10	10	360	417	236.48	1.25	2.70
12	12	432	493	200.82	2.33	6.00
14	14	504	569	175.05	1.45	3.90
15	15	540	607	179.00	1.38	2.40
16	16	576	645	162.24	1.70	3.30
18	18	648	721	145.12	1.48	2.70

3.2.2 Text programu pro řešení úlohy typu p centrum

V dalším textu práce bude uveden text programu pro variantu zkoumané spojité lokační úlohy s 12 zdroji a vazební podmínkou ve tvaru $\sum_{j \in J} x_{ij} \leq ny_i$

```
model centrum_2_12
uses "mmxprs"
declarations
zdroj=1..12
zakaznik=1..36
d:array(zdroj,zakaznik) of real
x:array(zdroj,zakaznik) of mpvar
y:array(zdroj) of mpvar
p=6
n=36
z:mpvar
end-declarations
d::[]
forall(j in zakaznik)sum(i in zdroj)d(i,j)*x(i,j)<=z
forall(j in zakaznik)sum(i in zdroj)x(i,j)=1
forall(i in zdroj) sum(j in zakaznik)x(i,j)<=n*y(i)
sum(i in zdroj)y(i)=p
forall(i in zdroj)y(i)is_binary
forall(i in zdroj,j in zakaznik)x(i,j)is_binary
z>=0
minimize(z)
writeln("Maximalni vzdalenost mezi zakaznikem a k nemu pridelenem zdroji je : ",getobjval," km")
forall(i in zdroj,j in zakaznik)writeln("x(",i,",",j,")=",getsol(x(i,j)))
forall(i in zdroj)writeln("y(",i,")=",getsol(y(i)))
end-model
```

Řešením dané úlohy je :

Maximalni vzdalenost mezi zakaznikem a k nemu pridelenem zdroji je : 12.23 km

$x(1,13)=1$	$x(7,8)=1$	$x(8,30)=1$	$x(10,17)=1$	$x(10,27)=1$	$x(11,21)=1$
$x(4,7)=1$	$x(7,29)=1$	$x(8,33)=1$	$x(10,18)=1$	$x(10,28)=1$	$x(11,22)=1$
$x(4,25)=1$	$x(8,11)=1$	$x(8,34)=1$	$x(10,19)=1$	$x(11,5)=1$	$x(11,31)=1$
$x(7,2)=1$	$x(8,12)=1$	$x(10,1)=1$	$x(10,20)=1$	$x(11,6)=1$	$x(11,32)=1$
$x(7,3)=1$	$x(8,16)=1$	$x(10,14)=1$	$x(10,23)=1$	$x(11,9)=1$	$x(11,35)=1$
$x(7,4)=1$	$x(8,24)=1$	$x(10,15)=1$	$x(10,26)=1$	$x(11,10)=1$	$x(11,36)=1$
$y(1)=1$	$y(4)=1$	$y(7)=1$	$y(8)=1$	$y(10)=1$	$y(11)=1$

Následující dvě tabulky zobrazují výstupy experimentování s úlohou p -centrum. První tabulka ukazuje výsledky při využití jednodušší podmínky (31). Druhá tabulka zobrazuje výsledky při využití skupiny podmínek (36). Dané tabulky obsahují informace ohledně počtu všech proměnných v modelu, počtu podmínek modelu, hodnoty účelové funkce a výpočetního času.

Tabulka č. 6 – Srovnání výpočetního času úlohy p -centrum pro různý počet vhodných lokalit v území pro skupinu podmínek (31)

Počet lokalit	Počet proměnných y_i	Počet proměnných x_{ij}	Počet podmínek	Hodnota účelové funkce [vzdál.jedn.]	Výpočetní čas [s] - průměrný	Výpočetní čas [s] - maximální
1	1	36	147	21.21	1.25	3.30
2	2	72	220	26.22	0.93	2.00
3	3	108	293	24.21	1.15	2.70
4	4	144	366	18.75	1.38	3.30
5	5	180	439	19.10	1.35	2.30
6	6	216	512	15.53	0.90	1.80
7	7	252	585	13.83	1.20	2.80
8	8	288	658	13.69	1.15	2.60
9	9	324	731	13.04	0.98	2.00
10	10	360	804	15.98	0.75	1.40
12	12	432	950	12.23	0.98	1.80
14	14	504	1096	8.56	1.63	2.90
15	15	540	1169	9.22	1.75	4.20
16	16	576	1242	7.75	1.60	4.40

18	18	648	1388	7.16	1.15	2.60
----	----	-----	------	------	------	------

Tabulka č. 7 – Srovnání výpočetního času úlohy p centrum pro různý počet vhodných lokalit v území pro skupinu podmínek (36)

Počet lokalit	Počet proměnných y_i	Počet proměnných x_{ij}	Počet podmínek	Hodnota účelové funkce [vzdál.jedn.]	Výpočetní čas [s] - průměrný	Výpočetní čas [s] - maximální
1	1	36	112	21.21	0.88	1.90
2	2	72	150	26.22	1.08	2.80
3	3	108	188	24.21	0.88	1.90
4	4	144	226	18.75	1.00	2.00
5	5	180	264	19.1	1.25	3.10
6	6	216	302	15.53	1.43	3.40
7	7	252	340	13.83	1.65	3.60
8	8	288	378	13.69	1.78	4.40
9	9	324	416	13.04	1.38	3.40
10	10	360	454	15.98	1.18	2.70
12	12	432	530	12.23	1.20	2.70
14	14	504	606	8.56	1.28	2.60
15	15	540	644	9.22	1.20	2.70
16	16	576	682	7.75	1.33	3.40
18	18	648	758	7.16	1.30	2.10

3.2.3 Text programu pro řešení úlohy maximum p -disperze

V dalším textu práce bude uveden text programu pro variantu zkoumané spojité lokační úlohy s 12 zdroji:

```
model maxisum_12
```

```
uses "mmxprs";
```

```
declarations
```

```
zdroj=1..12
```

```

zakaznik=1..36
d:array(zdroj,zakaznik) of real
x:array(zdroj,zakaznik) of mpvar
y:array(zdroj) of mpvar
p=6
n=36
end-declarations
d::[]
forall(j in zakaznik)sum(i in zdroj)x(i,j)=1
forall(i in zdroj) sum(j in zakaznik)x(i,j)<=n*y(i)
sum(i in zdroj)y(i)=p
forall(i in zdroj)y(i)is_binary
forall(i in zdroj,j in zakaznik)x(i,j)is_binary
celkova_vzdalenost:=sum(i in zdroj,j in zakaznik)d(i,j)*x(i,j)
maximize(celkova_vzdalenost)
writeln("Celkova souctova vzdalenost je : ",getobjval," km")
forall(i in zdroj,j in zakaznik)writeln("x(",i,",",j,")=",getsol(x(i,j)))
forall(i in zdroj)writeln("y(",i,")=",getsol(y(i)))
end-model

```

Řešením dané úlohy je :

Celkova vzdalenost je : 962.91 km

x(1,25)=1	x(5,4)=1	x(9,2)=1	x(9,22)=1	x(9,36)=1	x(11,19)=1
x(1,26)=1	x(5,27)=1	x(9,5)=1	x(9,29)=1	x(11,13)=1	x(12,7)=1
x(2,20)=1	x(5,28)=1	x(9,6)=1	x(9,30)=1	x(11,14)=1	x(12,8)=1
x(2,23)=1	x(5,31)=1	x(9,9)=1	x(9,33)=1	x(11,15)=1	x(12,10)=1
x(2,24)=1	x(5,32)=1	x(9,17)=1	x(9,34)=1	x(11,16)=1	x(12,11)=1
x(5,3)=1	x(9,1)=1	x(9,21)=1	x(9,35)=1	x(11,18)=1	x(12,12)=1
y(1)=1	y(2)=1	y(5)=1	y(9)=1	y(11)=1	y(12)=1

Následující tabulka zobrazuje výstupy experimentování s úlohou maxisum p -disperze. Daná tabulka obsahuje informace ohledně počtu všech proměnných v modelu, počtu podmínek modelu, hodnoty účelové funkce a výpočetního času.

Tabulka č. 8 – Srovnání výpočetního času úlohy maximum p -disperze pro různý počet vhodných lokalit v území

Počet lokalit	Počet proměnných y_i	Počet proměnných x_{ij}	Počet podmínek	Hodnota účelové funkce [vzdál. jedn.]	Výpočetní čas [s] – průměrný	Výpočetní čas [s] – maximální
1	1	36	110	443.76	1.05	2.70
2	2	72	183	510.59	1.40	3.20
3	3	108	256	538.46	1.15	3.10
4	4	144	329	670.09	1.20	2.40
5	5	180	402	664.86	1.03	1.70
6	6	216	475	832.04	1.08	2.70
7	7	252	548	805.96	0.98	2.10
8	8	288	621	892.62	0.88	2.10
9	9	324	694	930.64	1.45	3.70
10	10	360	767	941.16	1.40	3.80
12	12	432	913	962.91	1.88	3.60
14	14	504	1059	1006.4	1.16	3.05
15	15	540	1132	1021.26	1.00	2.10
16	16	576	1205	1027.91	1.35	3.30
18	18	648	1351	1052.45	2.18	4.50

3.2.4 Text programu pro řešení úlohy typu maximum p -disperze

V dalším textu práce bude uveden text programu pro variantu zkoumané spojité lokační úlohy s 12 zdroji:

```
model maximin_12
uses "mmxprs";
declarations
zdroj=1..12
```

```

zakaznik=1..36
d:array(zdroj,zakaznik) of real
x:array(zdroj,zakaznik) of mpvar
y:array(zdroj) of mpvar
p=6
z:mpvar
end-declarations

d::[]
forall(j in zakaznik)sum(i in zdroj)d(i,j)*x(i,j)>=z
forall(j in zakaznik)sum(i in zdroj)x(i,j)=1
forall(i in zdroj,j in zakaznik)x(i,j)<=y(i)
sum(i in zdroj)y(i)=p
forall(i in zdroj)y(i)is_binary
forall(i in zdroj,j in zakaznik)x(i,j)is_binary
z>=0
maximize(z)

writeln("Minimalni vzdalenost mezi zakaznikem a k nemu pridelenem nezadoucim zdroji je :
",getobjval," km")

forall(i in zdroj,j in zakaznik)writeln("x(",i,",",j,")=",getsol(x(i,j)))
forall(i in zdroj)writeln("y(",i,")=",getsol(y(i)))

end-model

```

Řešením dané úlohy je :

Minimalni vzdalenost mezi zakaznikem a k nemu pridelenem nezadoucim zdroji je : 14.63 km

x(8,28)=1	x(10,32)=1	x(11,26)=1	x(12,6)=1	x(12,12)=1	x(12,25)=1
x(9,1)=1	x(11,2)=1	x(11,27)=1	x(12,7)=1	x(12,15)=1	x(12,29)=1
x(9,17)=1	x(11,13)=1	x(11,30)=1	x(12,8)=1	x(12,16)=1	x(12,33)=1
x(9,22)=1	x(11,14)=1	x(12,3)=1	x(12,9)=1	x(12,20)=1	x(12,34)=1
x(9,31)=1	x(11,18)=1	x(12,4)=1	x(12,10)=1	x(12,23)=1	x(12,35)=1
x(10,21)=1	x(11,19)=1	x(12,5)=1	x(12,11)=1	x(12,24)=1	x(12,36)=1
y(1)=1	y(8)=1	y(9)=1	y(10)=1	y(11)=1	y(12)=1

Následující tabulka zobrazuje výstupy experimentování s úlohou maximin p -disperze. Daná tabulka obsahuje informace ohledně počtu všech proměnných v modelu, počtu podmínek modelu, hodnoty účelové funkce a výpočetního času.

Tabulka č. 9 – Srovnání výpočetního času maximin p -disperze pro různý počet vhodných lokalit v území

Počet lokalit	Počet proměnných y_i	Počet proměnných x_{ij}	Počet podmínek	Hodnota účelové funkce [vzdál.jedn.]	Výpočetní čas [s] - průměrný	Výpočetní čas [s] - maximální
1	1	36	147	0.00	0.80	1.50
2	2	72	220	2.50	1.25	3.40
3	3	108	293	2.24	1.55	4.30
4	4	144	366	10.15	1.45	3.40
5	5	180	439	6.71	1.58	4.40
6	6	216	512	14.43	1.25	2.70
7	7	252	585	13.24	1.60	4.50
8	8	288	658	16.13	1.73	5.20
9	9	324	731	16.12	1.45	4.20
10	10	360	804	20.52	2.00	6.30
12	12	432	950	14.63	1.75	4.90
14	14	504	1096	20.63	2.08	6.70
15	15	540	1169	21.93	1.98	4.60
16	16	576	1242	22.70	1.53	4.50
18	18	648	1388	19.53	1.45	4.20

V daném případě můžeme vidět hodnotu účelové funkce pro počet lokalit 1 rovnou 0.00. Je to způsobeno tím, že máme umístěného zákazníka ve souřadnicích [15,15] a jediná lokalita vhodná pro umístění zdroje se nachází v těžišti zvoleného území tedy taky na souřadnicích [15,15]. To znamená, že nežádoucí zdroj je umístěn přímo v lokalitě jednoho zákazníka. Bohužel zkoumaný model nemá zajištěné omezení, které by zabraňovalo vzniku takové situace, jelikož v diplomové práci jsem pracovala s nejjednoduššími modely na umístění nežádoucích zdrojů ve zkoumaném území.

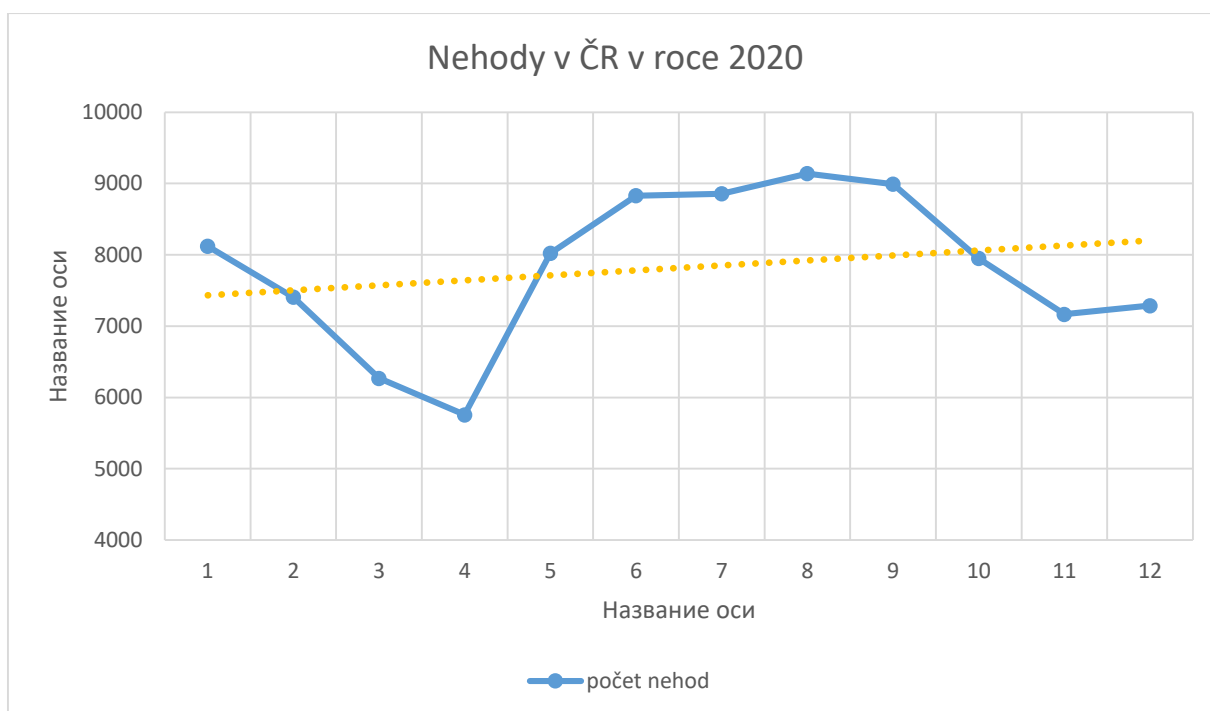
4 Vyhodnocení výsledků

4.1 Zvolená metodika vyhodnocení výsledků výpočetních experimentů

V této kapitole budeme vyhodnocovat výsledky jednotlivých výpočetních experimentů zejména se zaměříme na výpočetní časy úloh s různým počtem lokalit na umístění zdrojů se snahou vyhodnotit efektivnost jednotlivých modelů a vzájemnou souvislost výpočetního času a počtu lokalit. U lokačních úloh, které byly uvedené v dané diplomové práci, se očekává, že jejich výpočetní doba roste exponenciálně při větších rozsazích úloh, ale za účelem experimentování jsme se pohybovali u malých hodnot jako u velikosti území, taky u počtu zákazníků a lokalit, a proto prozkoumáme lineární závislost vzniklých výpočetních časů.

Pro zkoumání vzájemné závislosti mezi výpočetním časem a počtem proměnných v modelu využijeme jednu ze statistických metod – regrese [21]. Regresní analýza je nástrojem k hledání závislosti mezi dvěma náhodnými veličinami X , což je nezávislá proměnná, a Y , což je závislá proměnná, s možností využití dané regrese pro následující předpověď jedné veličiny se znalostí druhé veličiny. Jinými slovy regrese zkoumá, zda mezi veličinami existuje nějaký vztah. V běžné praxi se nejčastěji setkáváme s lineárním trendy, ale jsou i další trendy jako polynomické, exponenciální nebo logistické.

Následující Obrázek č. 7 ukazuje příklad lineární regresní přímky pro data, které udávají nehodovost v České republice v roce 2020 po jednotlivých měsících. Modrá křivka zobrazuje počet nehod v jednotlivých měsících a žlutá přímka pak znázorňuje regresní přímku. Z obrázku je vidět, že regresní přímka mírně stoupá, což znamená, že data mají stoupající trend a počet nehod v průběhu času v průměru roste.



Obrázek č.7 – Regresní přímka - příklad

Základem každé lineární regrese je přímka, která udává trend dat a nejčastěji se zobrazuje v následujícím tvaru:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x \quad (52)$$

$[x, y]$ je libovolným bodem přímky, kde x je nezávislou proměnnou nebo prediktorem a y je závislou proměnnou nebo odezvou. Koeficient β_1 je směrnice přímky, která určuje sklon přímky. Tento koeficient vypovídá o trendu regresní přímky. Je-li $\beta_1 > 0$, tak přímka roste. V případě, že $\beta_1 = 0$, tak je vodorovná, jinak její trend je klesající. β_0 je absolutní člen, který udává posunutí přímky po ose Y .

V regresní analýze se často setkáváme se snahou o nalezení optimální přímky, která se vyznačuje tím, že její poloha vůči datovým bodům minimalizuje předem určené kritérium vzdálenosti. Takovou optimální přímku budeme nazývat regresní přímku.

Velmi často součástí vztahu (52) je chyba predikce e_i , která udává rozdíl mezi skutečnou hodnotou proměnné a predikcí, která byla vytvořená na základě předchozích dat, ale vzhledem k tomu, že v dané části diplomové práce je pozornost zaměřena primárně na zkoumání existujících výsledků, s chybou predikce nebudeme pracovat.

Pro nacházení koeficientů regresní přímky se používají následující vztahy :

$$\beta_1 = \frac{S_{xy}}{S_{xx}} \quad (53)$$

$$\beta_0 = \bar{y} - \beta_1 \bar{x} \quad (54)$$

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (55)$$

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \quad (56)$$

$$S_{xx} = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \quad (57)$$

$$S_{xy} = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(\bar{y} - y_i) \quad (58)$$

$$R = \frac{S_{xy}}{\sqrt{S_{xx}S_{yy}}} \quad (59)$$

$$S_{yy} = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 \quad (60)$$

Vztah (59) udává vzorec na výpočet korelačního koeficientu, který zobrazuje vazbu mezi x a y . Jeho rozsah je $R \in [-1,1]$. V případě, že korelační koeficient se rovná nule, tak mezi dvěma proměnnými neexistuje žádný vztah a není důvod počítat regresi. Čím více se korelační koeficient blíží 1 nebo -1, tím silnější vazba je mezi proměnnými. Jestli hodnota R se rovná 1 nebo -1, tak to znamená, že regresní přímka prochází přes všechny zkoumané body.

Kromě korelačního koeficientu budeme ještě pracovat s hodnotou indexu determinace, který se značí R^2 , a jeho rozsah je $R^2 \in [0,1]$. Index determinace udává míru kvality regresního modelu a vyjadřuje jaký podíl variability závislé proměnné může model vysvětlit. Jestli hodnota R^2 se rovná 1, tak predikce závislé proměnné se vždy bude rovnat skutečné hodnotě, ale jestli R^2 se rovná 0, tak nelze přesně předpovídat hodnoty závislé proměnné.

Vzhledem k tomu, že máme za cíl posoudit výsledky jednotlivých úloh nejen z pohledu závislosti výpočetního času na počtu lokalit, ale taky porovnat výsledky stejných modelů s různými vazebními podmínky a srovnat některé modely mezi sebou navzájem, využijeme k tomu účelu ještě několik dalších statistických nástrojů pro zkoumání dat.

Průměr udává hladinu, na které se data nachází a počítá se jako součet všech zkoumaných hodnot dělený počtem hodnot. Ve své diplomové práci budu používat výběrový průměr, který je základní charakteristikou náhodného výběru. Náhodným výběrem z rozdělení náhodné veličiny je n -tice nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin pocházejících z rozdělení náhodné veličiny. Výběrový průměr se nejčastěji značí \bar{x} a jeho výpočet je součástí výpočtu korelačního koeficientu. Pro úplnost ještě jednou uvedeme vzorec pro výpočet průměru :

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (61)$$

kde x_i jsou zkoumané hodnoty a n je počet hodnot.

Rozptyl je indikátorem, který zobrazuje rozptýlení pozorovaných hodnot kolem průměru, tedy jak moc se jednotlivé realizace od sebe liší. Čím je rozptyl větší, tím je větší rozptýlenost dat a naopak. Stále pracujeme s náhodným výběrem a proto použijeme výběrový rozptyl, který se označuje σ^2 a počítá se pomocí následující vztahu:

$$\sigma^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \quad (62)$$

Výběrová směrodatná odchylka je odmocninou z výběrového rozptylu, která proto nabývá jen nezáporných hodnot a má stejné měrné jednotky jako zkoumaná data. Čím více se výběrová směrodatná odchylka blíží k nule, tím více se data přibližují průměru a tím méně anomálních hodnot se dá v naměřených datech očekávat. Vztah pro výpočet směrodatné odchylky je:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} \quad (63)$$

Jako další indikátory statistiky použijeme v diplomové práci maximální a minimální hodnoty výpočetních časů různých modelů.

Výše zmíněné analýzy a statistické charakteristiky mají za cíl zkoumat chování každého modelu zvlášť ale považují za přínosné provést srovnání modelů mezi sebou nejen z hlediska těchto veličin ale taky přednostně z hlediska výpočetních časů. A proto tato práce bude obsahovat porovnání výpočetních časů různých modelů a modelů stejného typu jen s různými skupinami podmínek pro posouzení vlivu počtu podmínek a účelové funkce na výpočetní čas. Srovnávat výpočetní časy mezi modely budeme procentuálně pomocí následujícího vztahu a v rámci dané práce tento procentuální rozdíl označíme P . Tento vztah ukáže o kolik procent je řešení nějakého ze dvou modelů výpočetně rychlejší než řešení druhého modelu a tyto procentuální rozdíly budou zobrazeny pomocí grafů.

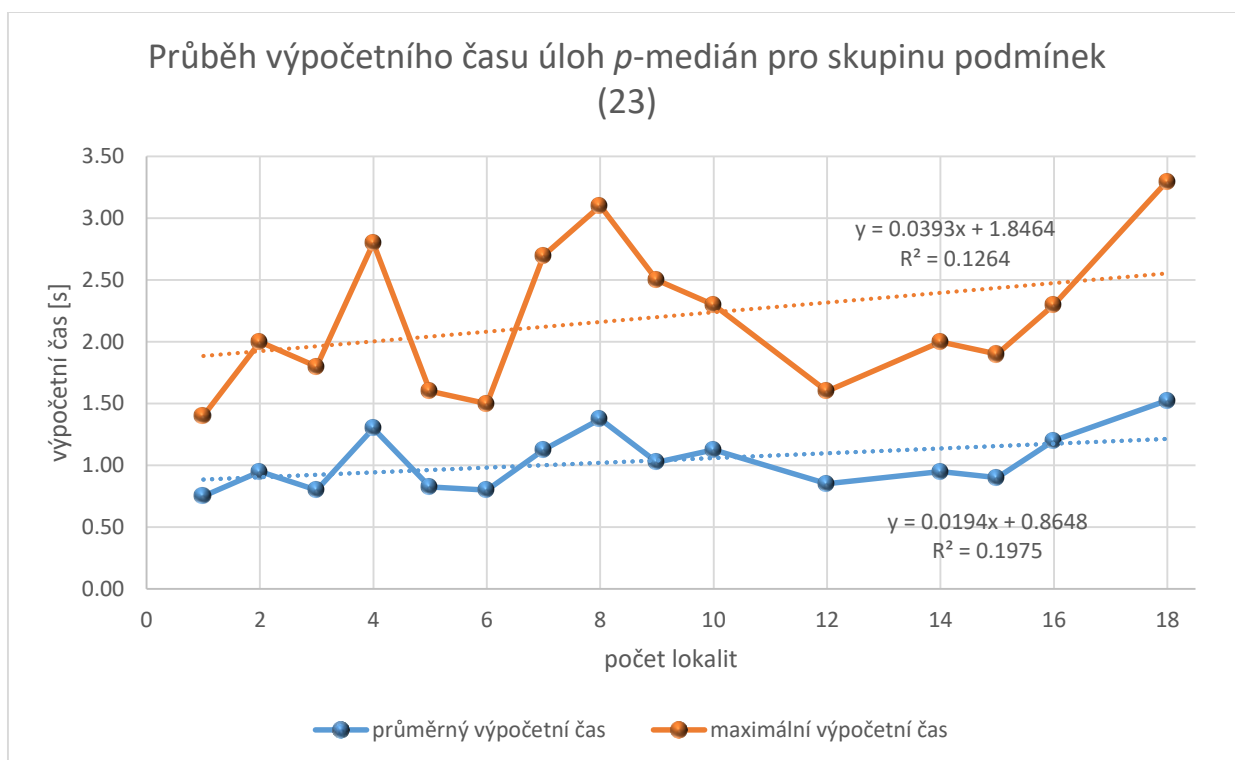
$$P = 100 - \frac{100s_{i1}}{s_{i2}} \quad (64)$$

kde s_{i1} je výpočetní čas modelu 1 pro počet lokalit i a s_{i2} je výpočetní čas modelu 2 pro počet lokalit i

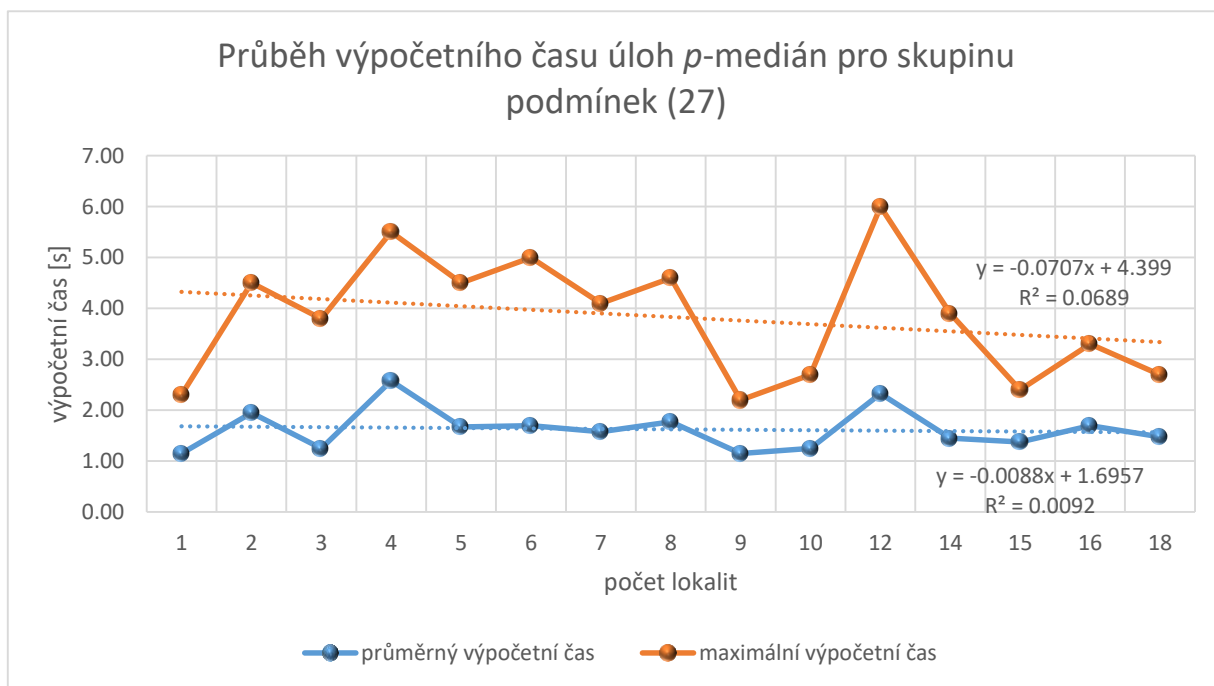
V následujícím textu bude přistoupeno k analýze výpočetních časů jednotlivých diskretizovaných spojitých lokačních modelů, které byly popsány v diplomové práci. K zobrazení výpočetních časů v daném případě využijeme grafy, kde souřadnicová osa x bude zobrazovat počty lokalit a souřadnicová osa y bude zobrazovat hodnoty výpočetních časů. Do grafů bude také nakreslena linie trendu pro každou posloupnost dat.

Na základě výše zmíněných vztahů pro výpočet regresní přímky byly vypočteny regresní přímky pro každou variantu zkoumaných úloh. Matematický zápis regresní přímky spolu s indexem determinace každého modelu je zobrazen na grafu.

4.1.1 Vyhodnocení výsledků výpočetních experimentů úlohy typu p -medián



Obrázek č. 8 – Průběh výpočetního času v úloze typu p -medián se skupinou podmínek (23)



Obrázek č. 9 – Průběh výpočetního času v úloze typu p -medián se skupinou podmínek (27)

Jak lze vidět ze dvou předchozích grafů, průběhy hodnot průměrného a maximálního výpočetního času pro stejný typ úlohy se dvěma různými skupinami vazebních podmínek se navzájem kopírují a ukazují přitom výsledek, že ne ve všech případech dochází k mírnému postupnému stoupání přímkem se zvětšením počtu zkoumaných lokalit. V případě modelu se skupinou podmínek (27) lze dokonce vidět i klesající trend, což i potvrzuje funkční předpis regresní přímky a to zápornou hodnotou β_1 . Trend na Obrázku č. 8, tedy grafu pro průběh výpočetních časů modelu s jednoduššími podmínkami, je naopak pro oba průběhy mírně rostoucí.

Indexy determinace jsou ve všech čtyřech případech docela nízké zejména v případě modelu se skupinou podmínek (27), kde tyto hodnoty se blíží nule. Jak už bylo zmíněno výše indexy determinace ukazují podíl variability závislé proměnné, který lze vysvětlit modelem. Čím blíže je hodnota indexu determinace k 1, tím přesnější jsou předpovědi závislé proměnné. Pro tento model výsledky ukazují, že předpověď následujících hodnot závislé proměnné, tedy výpočetních časů, je obtížná a značně nepřesná.

Korelační koeficient průměrného výpočetního času v případě modelu se skupinou podmínek (23) se rovná 0.44 a pro maximální výpočetní čas se rovná 0.36. Korelační koeficient průměrného výpočetního času v případě modelu se skupinou podmínek (27) se rovná -0.09 a pro maximální výpočetní čas se rovná -0.27. Hodnoty korelačních koeficientů byly vypočteny pomocí výše zmíněných vzorců a ověřeny pomocí funkce Excel. Ve všech čtyřech případech je korelační koeficient různý od nuly. Kdyby korelační koeficient byl rovný nule, tak by to naznačovalo, že mezi proměnnými není žádný lineární vztah. Ale můžeme také vidět výrazný rozdíl mezi korelačními koeficienty modelů se skupinou podmínek (23) a (27), jelikož v případě modelu

se skupinou podmínek (27) hodnoty koeficientu se blíží k nule a naopak hodnoty korelačního koeficientu v případě modelu s jednoduššími podmínky vykazují existence vazby mezi výpočetním časem a počtem lokalit.

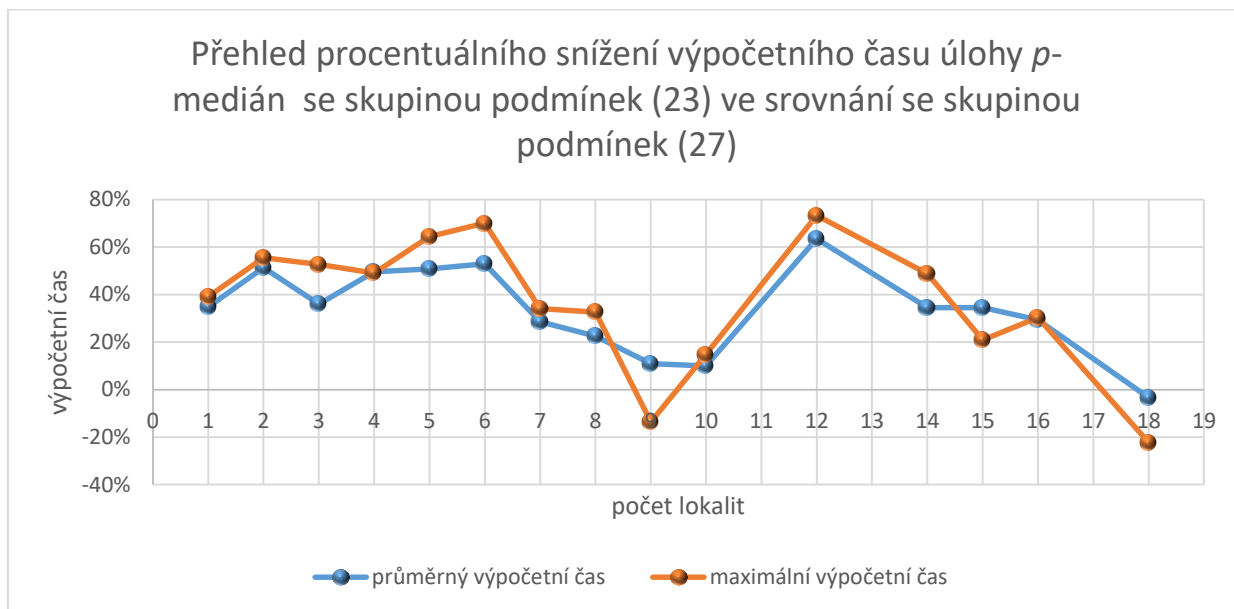
Minimální hodnota průměrného výpočetního času v případě modelu se skupinou podmínek (23), tedy modelu s jednoduššími podmínkami, je 0.75 sekund a maximální hodnota průměrného času je 1.53 sekundy. Pro maximální výpočetní čas se rovná minimální hodnota 1.40 sekundám a maximální hodnota je 3.30 sekundy. Pro model s výpočetně komplikovanějšími podmínkami ve formátu (27) se minimální průměrný čas rovná 1.15 sekundám a maximální výpočetní čas je 2.58 sekund. Pro maximální výpočetní časy se rovná minimální hodnota 2.20 sekundám a maximální čas se rovná 6,00 sekundám.

Průměr hodnot průměrných výpočetních časů řešení modelů se skupinou vazebních podmínek (23) se rovná 1.03 sekundám a průměr hodnot maximálních výpočetních časů se rovná 2.19 sekundám. V případě řešení modelů se skupinou podmínek (27) je průměr hodnot průměrných výpočetních časů 1.63 sekundám a průměr hodnot maximálních výpočetních časů 3.83 sekundy. Jak lze vidět z průměrů výpočetních časů, tak výpočetní časy modelů se skupinou podmínek (23) a (27) jsou různé s tím, že model se skupinou výpočetně složitějších podmínek (27) má delší výpočetní čas než model s jednoduššími podmínky. V daném případě můžeme udělat závěr, že výpočetní obtížnost omezení ovlivnila výpočetní dobu modelů.

Dále bude zhodnocena variabilita dosažených výsledků, tedy výběrového rozptylu a výběrové směrodatné odchylky s tím, že větší důraz bude kladen na výběrovou směrodatnou odchylku, jelikož zobrazuje rozptýlenost dat kolem výběrového průměru v sekundách. V případě řešení modelu se skupinou podmínek (23) je hodnota výběrového rozptylu hodnot průměrných výpočetních časů 0.06 a hodnota výběrové směrodatné odchylky se rovná 0.23 sekundám. V případě hodnot maximálních časů je hodnota výběrového rozptylu 0.35 a hodnota výběrové směrodatné odchylky 0.59. V případě modelu se skupinou podmínek (27) je hodnota výběrového rozptylu hodnot průměrných výpočetních časů 0.17 a hodnota výběrové směrodatné odchylky se rovná 0.41 sekundám. V případě hodnot maximálních časů je hodnota výběrového rozptylu 1.45 a hodnota výběrové směrodatné odchylky se rovná 1.20. Jak lze vidět, hodnota výběrové směrodatné odchylky v případě maximálních hodnot výpočetních časů je větší než hodnota výběrové směrodatné odchylky v případě průměrných hodnot výpočetních časů. To znamená, že hodnoty maximálních výpočetních časů jsou více rozptýleny kolem jejich průměrné hodnoty než hodnoty průměrných výpočetních časů.

4.1.2 Porovnání dvou modelů úlohy typu p -medián

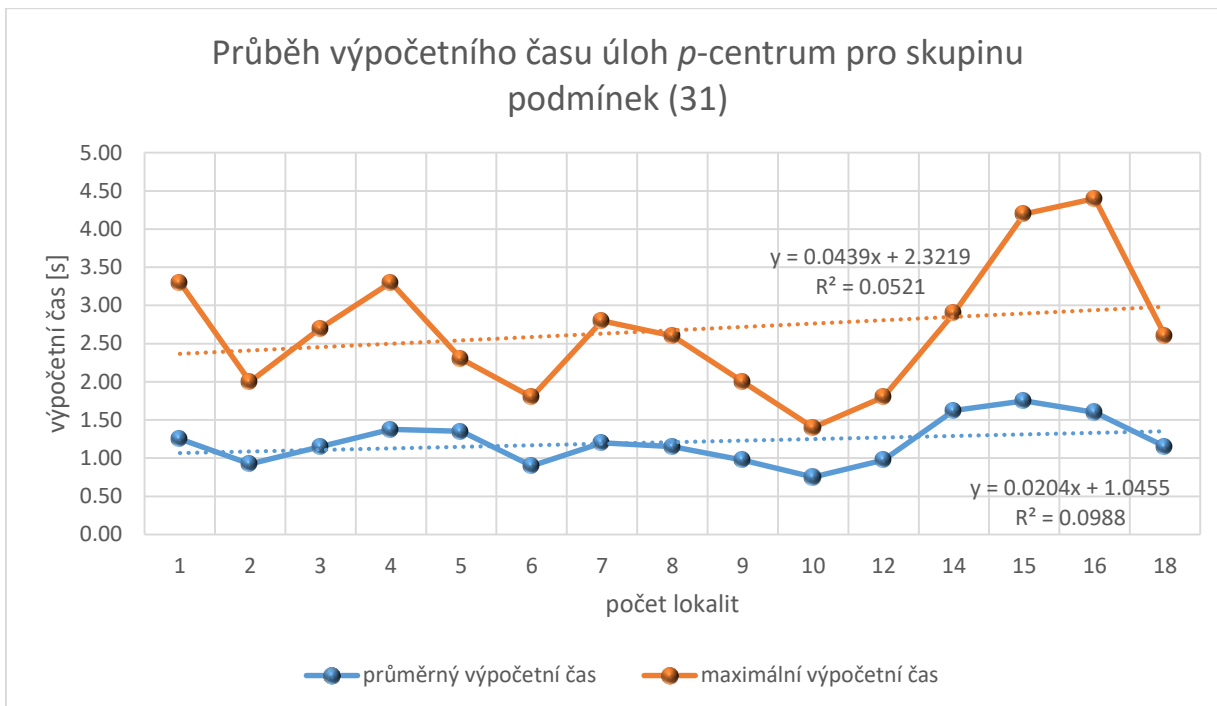
Následně bylo provedeno srovnání průměrných a maximálních výpočetních časů úloh typu p -medián obsahující skupinu podmínek (23) ve srovnání s úlohou typu p -medián obsahující skupinu podmínek (27).



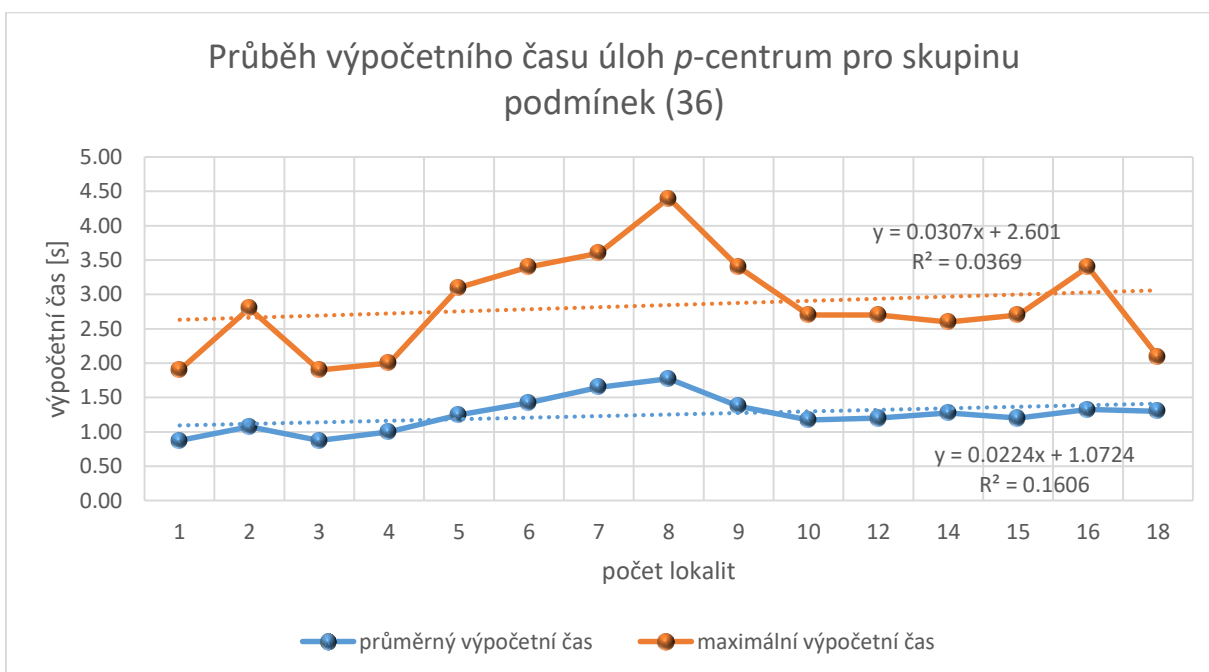
Obrázek č. 10 – Přehled procentuálních rozdílů výpočetních časů úloh typu p -medián obsahující skupinu podmínek (23) ve srovnání s úlohou typu p -medián obsahující skupinu podmínek (27)

Výsledky ukázaly, že kromě úloh s 9 a 18 lokalitami, je výpočetní čas kratší u úloh obsahujících skupinu podmínek (23), tedy se skupinou jednodušších podmínek, i když je jich větší počet, než u úloh obsahujících skupinu (27), kterých je sice méně, ale jsou výpočetně komplikovanější. Procentuálně jsem dospěla k číslu, že průměr hodnot průměrných výpočetních časů pro řešení modelů obsahujících skupinu podmínek (23) je o 33.72 % nižší, než pro řešení modelů, které využívají skupinu podmínek (27). U maximálních časů se jedná o hodnotu 36.65 %, i když se zde vyskytly dvě hodnoty, kdy výpočetní čas úlohy s větším počtem podmínek byl větší než v případě úloh s nižším počtem podmínek.

4.1.3 Vyhodnocení výsledků výpočetních experimentů úlohy typu p-centrum



Obrázek č.11 – Průběh výpočetního času úlohy p -centrum se skupinou podmínek (31)



Obrázek č.12 – Průběh výpočetního času úlohy p -centrum se skupinou podmínek (36)

Jak lze vidět ze dvou předchozích grafů, průběhy hodnot průměrného a maximálního výpočetního času pro stejný typ úlohy se dvěma různými skupinami vazebních podmínek se navzájem kopírují s mírnějším stoupáním a klesáním u průběhů průměrných výpočetních časů.

Analogicky jako v případě řešení modelů úloh typu p -medián vyskytují se v průběžích výpočetních časů výchyly místo pomalého a mírného stoupání. Ale na rozdíl od modelu p -medián všechny regresní přímky modelu p -centrum mají rostoucí trend, což je vidět i v matematickém zápisu regresních přímek tím, že hodnoty β_1 jsou vždy kladné. Kladnost těchto hodnot znamená přednostně to, že výpočetní časy mají tendenci k růstu se zvětšením počtu lokalit.

Indexy determinace se, analogicky jako u modelů pro řešení úloh typu p -medián, blíží k nule. Jedinou vyšší hodnotou je index determinace pro maximální výpočetní časy pro model se skupinou podmínek (36), který se rovná 0.16. Lze tedy udělat závěr, že i pro model p -centrum je predikce závislých proměnných nepřesná a model nevysvětluje variabilitu závislých proměnných.

Korelační koeficient průměrného výpočetního času v případě modelu se skupinou podmínek (31) se rovná 0.37 a pro maximální výpočetní čas nabývá hodnoty 0.28. Korelační koeficient průměrného výpočetního času v případě modelu se skupinou podmínek (36) se rovná 0.34 a pro maximální výpočetní čas se rovná 0.12. Analogicky jako v modelu p -medián korelační koeficienty jsou různé od nuly a ukazují na existenci vztahu mezi proměnnými. Ale v tomto případě můžeme naopak vidět rozdíl v korelačních koeficientech týkajících se průměrných výpočetních časů a maximálních výpočetních časů, kde korelační koeficienty průměrných časů jsou větší než maximálních časů zejména při řešení modelů se skupinou podmínek (36).

Minimální hodnota průměrného výpočetního času v případě modelu se skupinou podmínek (31), tedy modelu s jednoduššími podmínkami, je 0.75 sekund a maximální hodnota průměrného času je 1.75 sekund. Pro maximální výpočetní čas se rovná minimální hodnota 1.40 sekundám a maximální hodnota je 4.40 sekund. Pro model s výpočetně komplikovanějšími podmínkami ve skupině (36) se minimální průměrný čas rovná 0.88 sekundám a maximální výpočetní čas je 1.78 sekund. Pro maximální výpočetní časy se rovná minimální hodnota 1.90 sekundám a maximální čas se rovná 4.40 sekundám.

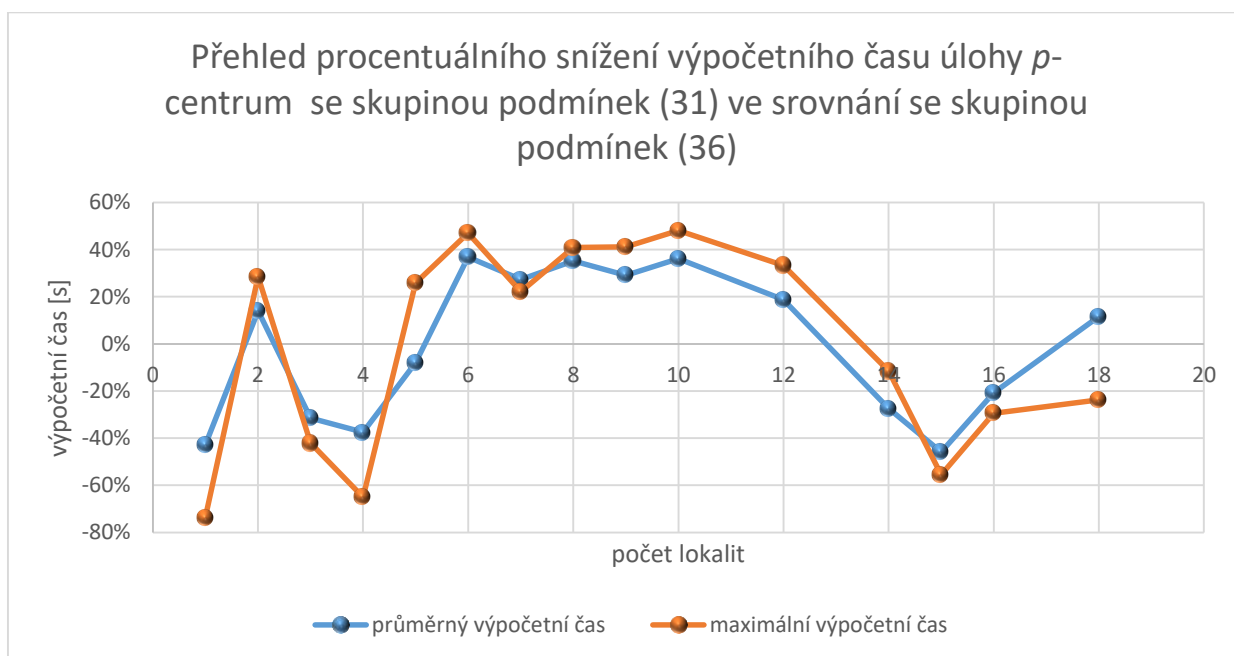
Průměr hodnot průměrných výpočetních časů řešení modelů se skupinou vazebních podmínek (31) se rovná 1.21 sekundám a průměr hodnot maximálních výpočetních časů se rovná 2.67 sekundám. V případě řešení modelů se skupinou podmínek (36) je průměr hodnot průměrných výpočetních časů 1.25 sekund a průměr hodnot maximálních výpočetních časů 2.85 sekund. Jak lze vidět z průměrů výpočetních časů, tak výpočetní časy modelů se skupinou podmínek (31) a (36) jsou přibližně stejné s tím, že model se skupinou podmínek (36) obsahuje výpočetně složitější omezení. V daném případě můžeme udělat závěr, že výpočetní obtížnost omezení neovlivnila výpočetní dobu modelů.

Dále bude zhodnocena variabilita dosažených výsledků, tedy výběrového rozptylu a výběrové směrodatné odchylky s tím, že analogicky jako v případě modelu pro řešení úlohy typu p -centrum

bude kladen větší důraz na hodnotu výběrové směrodatné odchylky. V případě řešení modelu se skupinou podmínek (31) je hodnota rozptylu hodnot průměrných výpočetních časů 0.08 a hodnota směrodatné odchylky se rovná 0.29 sekundám. V případě hodnot maximálních časů je hodnota výběrového rozptylu 0.74 a hodnota výběrové směrodatné odchylky 0.86. V případě modelu se skupinou podmínek (36) je hodnota výběrového rozptylu hodnot průměrných výpočetních časů 0.06 a hodnota výběrové směrodatné odchylky se rovná 0.25 sekundám. V případě hodnot maximálních časů je hodnota výběrového rozptylu 0.51 a hodnota výběrové směrodatné odchylky se rovná 0.72. V daném případě, analogicky jako v případě modelů úlohy typu p -medián, jsou výběrové směrodatné odchylky maximálních hodnot výpočetních časů větší než hodnoty výběrové směrodatné odchylky průměrných hodnot výpočetních časů. Ale na rozdíl od modelů úlohy typu p -medián jsou hodnoty výběrového rozptylu a výběrové směrodatné odchylky přibližně stejné pro modely se skupinou vazebních podmínek (31) a se skupinou vazebních podmínek (36).

4.1.4 Porovnání dvou modelů úlohy typu p -centrum

Následně bylo provedeno srovnání hodnot průměrných a maximálních výpočetních časů úloh typu p -centrum obsahující skupinu podmínek (31) ve srovnání s úlohou typu p -medián obsahující skupinu podmínek (36).

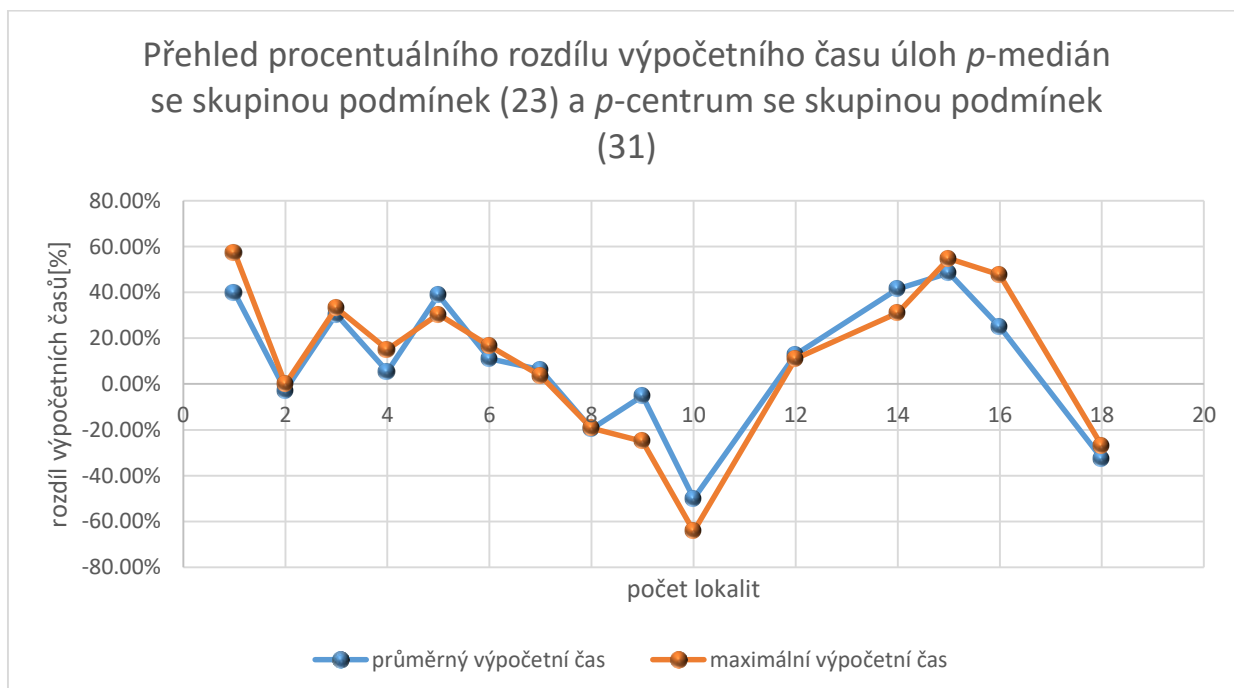


Obrázek č.13 – Přehled procentuálních rozdílů výpočetních časů úloh typu p -centrum obsahující skupinu podmínek (31) ve srovnání s úlohou typu p -centrum obsahující skupinu podmínek (36)

Výsledky ukázaly, že na rozdíl od modelů pro řešení úlohy typu p -medián v daném případě nemůžeme říci pro jaký model je možno bylo v provedených experimentech možno dosáhnout kratšího výpočetního času řešení. Řešení obou modelů, ať již modelu úlohy obsahující skupinu jednodušších podmínek (31), nebo modelu úlohy se skupinou výpočetně komplikovanějších podmínek (36), proběhlo přibližně ve stejných výpočetních časech, což i potvrzoval průměr z výpočetních časů.

4.1.5 Porovnání modelů úloh typu p -medián a p -centrum

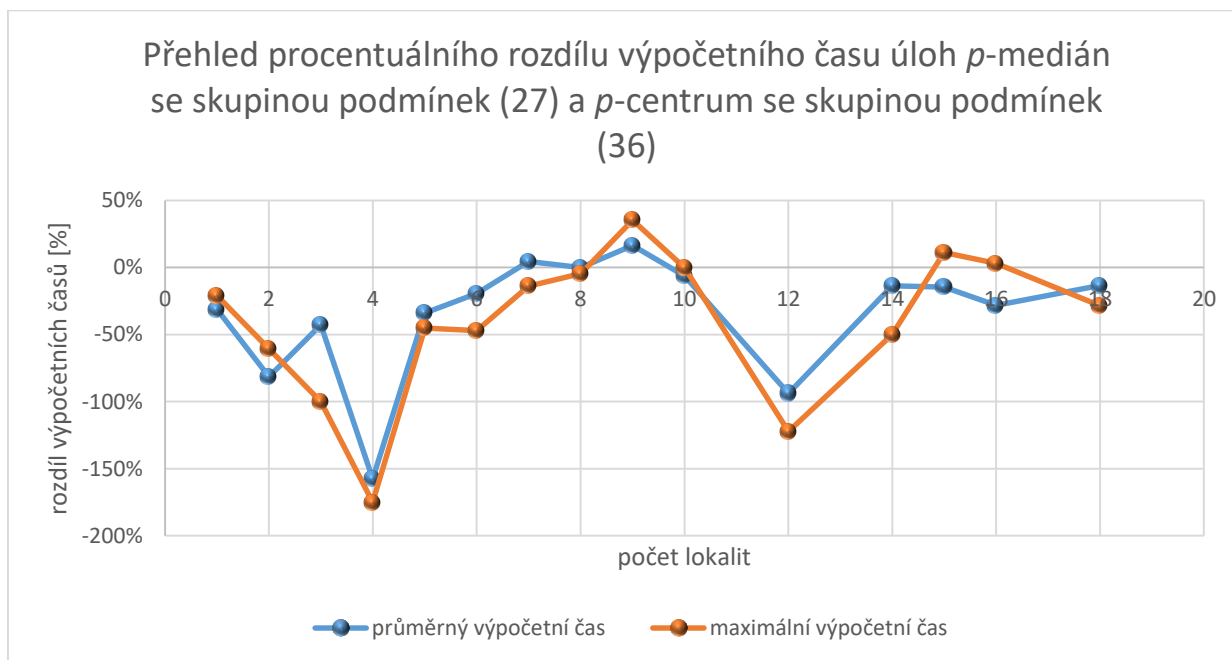
Ještě před tím než budou vyhodnoceny výsledky výpočetních experimentů provedených s modely úloh typů p -disperze maxisum a maximin, srovnáme mezi sebou výsledky výpočetních experimentů s modely úloh typů p -medián a p -centrum. Z jedné strany jsou to dvě absolutně rozdílné úlohy, ale z jiné strany mají mezi sebou shodný cíl a to minimalizaci vzdálenosti. V případě úloh typu p -medián se jedná o minimalizaci celkové vzdálenosti mezi zdroji a zákazníky a v případě úloh typu p -centrum je to minimalizace maximální vzdálenosti mezi zákazníkem a zdrojem. Na základě shodného cíle provedeme srovnání výsledků těchto dvou úloh a to modelů s jednoduššími vazebními podmínkami a modelů s výpočetně komplikovanějšími vazebními podmínkami samostatně.



Obrázek č.14 – Přehled procentuálních rozdílů výpočetních časů úloh typu p -medián obsahující skupinu podmínek (23) ve srovnání s úlohou typu p -centrum obsahující skupinu podmínek (31)

Výsledky ukázaly, že u 10 ze 15 případů, je výpočetní čas kratší v případě úloh typu p -medián obsahujících skupinu podmínek (23), tedy v případě typu úloh, které mají za cíl minimalizaci

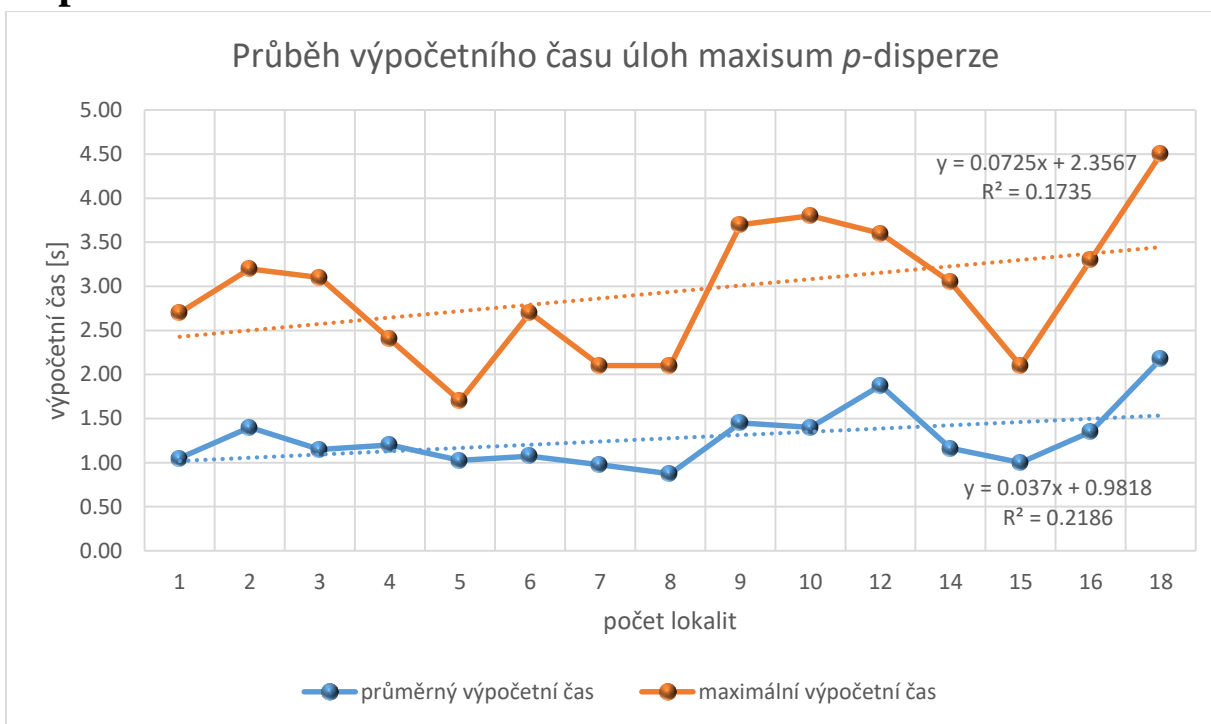
celkové vzdálenosti v systému, než v případě úloh typu p -centrum obsahujících skupinu (31), které mají za cíl minimalizaci maximální vzdálenosti. Procentuálně jsem dospěla k číslu, že průměr hodnot průměrných výpočetních časů pro řešení modelů úlohy typu p -medián je o 10.00 % nižší, než pro řešení modelů úlohy typu p -centrum. V případě maximálních času se jedná o hodnotu 11.06 %, i když se zde vyskytlo několik případů, kdy modely úlohy typu p -centrum vypočítány dříve.



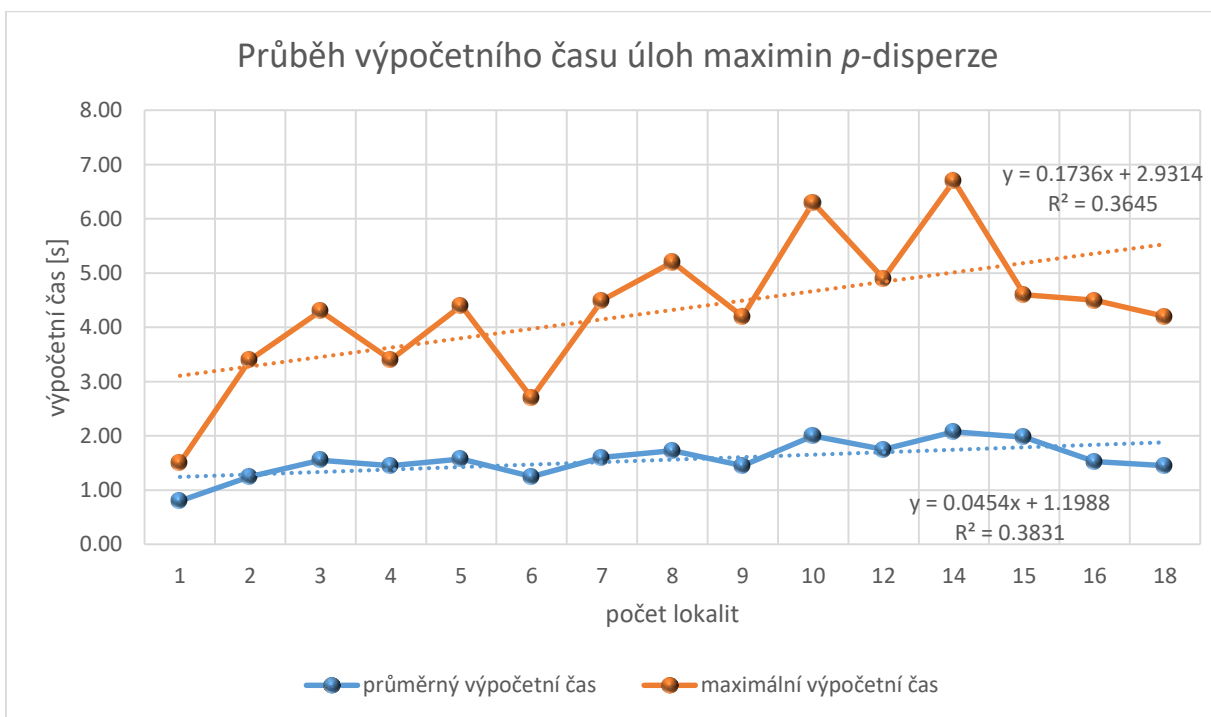
Obrázek č.15 –Přehled procentuálních rozdílů výpočetních časů úloh typu p -medián obsahující skupinu podmínek (27) ve srovnání s úlohou typu p -centrum obsahující skupinu podmínek (36)

Srovnání výpočetního času úlohy typu p -medián obsahujících skupinu podmínek (27) a úlohy typu p -centrum obsahujících skupinu (36) v daném případě ukázaly opačný výsledek a to ten, že úloha p -centrum je z hlediska spotřeby výpočetního času méně náročná než úloha p -medián. Procentuálně jsem dospěla k číslu, že průměr hodnot průměrných výpočetních časů pro řešení modelů úlohy typu p -centrum je o 34.39 % nižší, než pro řešení modelů úlohy typu p -medián. V případě maximálních časů se jedná o hodnotu 41.26 %. Takovou situaci můžeme vysvětlit právě tím, že v případě úlohy p -medián můžeme pozorovat zvýšení výpočetních časů v případě modelu obsahujících skupinu podmínek (27), tedy v případě modelu s výpočetně komplikovanějšími vazebními podmínkami v menším počtu, ve srovnání s modelem s jednoduššími vazebními podmínkami. Opakem jsou modely úloh typu p -centrum, kde se všechny výpočetní časy pohybovaly v blízkosti výběrového průměru a různé typy vazebních podmínek žádným zásadním způsobem neovlivnily hodnoty výpočetních časů.

4.1.6 Vyhodnocení výsledků výpočetních experimentů úlohy typu p -disperze maxisum a maximin



Obrázek č.16 – Průběh výpočetního času v úloze typu maxisum p -disperze



Obrázek č.17 – Průběh výpočetního času v úloze typu maximin p -disperze

Jak lze vidět ze dvou předchozích grafů, průběhy hodnot průměrného a maximálního výpočetního času pro modely maxisum a maximin úlohy typu p -disperze se navzájem kopírují minimálně s výraznými vrcholy u maximálních výpočetních časů a mírnějším stoupáním u průměrných výpočetních časů. Ale z jiné strany, u obou modelů je velice názorně vidět růst

trendu výpočetního času zejména u maximálních časů, kde došlo ke vzniku největších hodnot parametru β_1 ze všech zkoumaných modelů.

Indexy determinace jsou ve všech čtyřech případech vyšší ve srovnání se ostatními zkoumanými modely. Zejména v případě modelu úlohy typu maximin p -disperze se hodnota indexu determinace jak pro průměrné, tak i pro maximální výpočetní časy blíží k hodnotě 0.4, což ukazuje možnost přesnější předpovědi závislé proměnné na základě vytvořeného modelu.

Korelační koeficient průměrného výpočetního času v případě modelu úlohy typu maxisum p -disperze se rovná 0.49 a pro maximální výpočetní čas se rovná 0.43. Korelační koeficient průměrného výpočetního času v případě modelu úlohy typu maximin p -disperze se rovná 0.58 a pro maximální výpočetní čas se rovná 0.56. Ve všech čtyřech případech nejenže jsou korelační koeficienty různé od nuly, ale také nabývají maximálních hodnot mezi všemi zkoumanými typy úloh řešenými v rámci dané práci. Takové hodnoty korelačního koeficientu naznačují existenci vztahu mezi počtem lokalit a výpočetním časem.

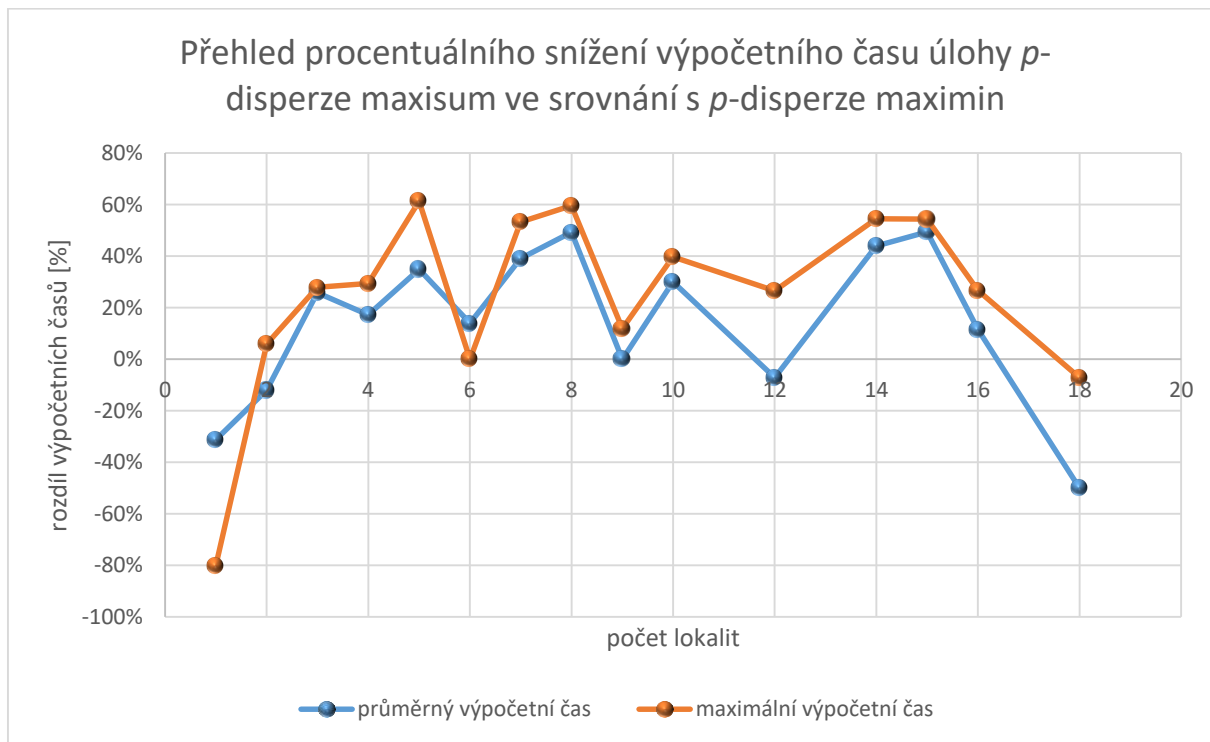
Minimální hodnota průměrného výpočetního času v případě modelu úlohy typu maxisum p -disperze je 0.88 sekund a maximální hodnota průměrného času je 2.18 sekundy. Pro maximální výpočetní čas se minimální hodnota rovná 1.70 sekundám a maximální hodnota je 4.50 sekund. Pro model úlohy typu maximin p -disperze se minimální průměrný čas rovná 0.80 sekundám a maximální výpočetní čas je 2.08 sekund. Pro maximální výpočetní časy se minimální hodnota rovná 1.50 sekundám a maximální čas se rovná 6.70 sekundám.

Průměr hodnot průměrných výpočetních časů řešení modelů úlohy typu maxisum p -disperze se rovná 1.28 sekundám a průměr hodnot maximálních výpočetních časů se rovná 2.94 sekundám. V případě řešení modelů úlohy typu maximin p -disperze je průměr hodnot průměrných výpočetních časů 1.56 sekundám a průměr hodnot maximálních výpočetních časů 4.32 sekundy.

Dále bude zhodnocena variabilita dosažených výsledků, tedy výběrového rozptylu a výběrové směrodatné odchyly s důrazem na výběrovou směrodatnou odchytku. V případě řešení modelu úlohy typu maxisum p -disperze je hodnota výběrového rozptylu hodnot průměrných výpočetních časů 0.13 a hodnota výběrové směrodatné odchyly se rovná 0.35 sekundám. V případě hodnot maximálních časů je hodnota výběrového rozptylu 0.61 a hodnota výběrové směrodatné odchyly 0.78. V případě modelu úlohy typu maximin p -disperze je hodnota výběrového rozptylu průměrných výpočetních časů 0.11 a hodnota výběrové směrodatné odchyly se rovná 0.33 sekundám. V případě hodnot maximálních časů je hodnota výběrového rozptylu 1.65 a hodnota výběrové směrodatné odchyly se rovná 1.29. V daném případě, analogicky jako u modelů úloh typu p -medián, můžeme vidět větší hodnoty výběrové směrodatné odchyly zejména v případě maximálních hodnot výpočetního času modelu úlohy typu p -disperze maximin, což ukazuje, že hodnoty maximálních výpočetních časů pro tento model jsou nejvíc rozptýlené kolem jejich průměrné hodnoty ze všech zkoumaných úloh v rámci dané diplomové práci.

4.1.7 Porovnání modelů úloh typu p -disperse maxisum a maximin

Analogicky, jako byly porovnávány hodnoty výpočetních časů pro řešení modelů úloh typu p -centrum a p -medián, budou porovnány ještě hodnoty výpočetních časů v případě modelů úloh typu p -disperse maxisum a maximin, jelikož také se sice jedná o modely dvou různých typů úloh, ale se stejným účelem a to minimalizaci vzdálenost do nežádoucího zdroje.



Obrázek č.18 – Přehled procentuálních rozdílů výpočetních časů úloh typu p -disperse maxisum a p -disperse maximin

Srovnání výpočetních časů v případě modelů úloh typu p -disperse maxisum a p -disperse maximin ukázalo, že kromě 3 případů jsou výpočetní časy modelů úloh typu p -disperse maxisum nižší, ale rozdíly nejsou významné. Procentuálně jsem dospěla k číslu, že průměr hodnot průměrných výpočetních časů pro řešení modelů úloh typu p -disperse maxisum je o 14.32 % nižší, než pro řešení modelů úloh typu p -disperse maximin. V případě maximálních časů se jedná o hodnotu 24.27 %. Takovou situaci můžeme vysvětlit právě tím, že u všech zkoumaných ukazatelů modelů těchto úloh jsme pozorovali přibližně stejné hodnoty.

4.2 Shrnutí vyhodnocení výsledků výpočetních experimentů všech typů úloh

Následující tabulka obsahuje shrnující přehled hlavních statistických ukazatelů na základě kterých se hodnotily zkoumané v dané diplomové práci lokační úlohy.

Tabulka č. 10 – Shrnutí hlavních statistických ukazatelů pro všechny zkoumané spojitě lokační úlohy

	β_1	R	R^2	\bar{x} [s]	Min [s]	Max [s]	σ^2	σ [s]
ρ -medián se sk.p. (23) střední časy	0.0194	0.44	0.1975	1.03	0.75	1.53	0.06	0.23
ρ -medián se sk.p. (23) max. časy	0.0393	0.36	0.1264	2.19	1.40	3.30	0.35	0.59
ρ -medián se sk.p. (27) střední časy	-0.0088	-0.09	0.0092	1.63	1.15	2.58	0.17	0.41
ρ -medián se sk.p. (27) max. časy	-0.0707	-0.27	0.0689	3.83	2.20	6.00	1.45	1.20
ρ -centrum se sk.p. (31) střední časy	0.0204	0.37	0.0988	1.21	0.75	1.75	0.08	0.29
ρ -cetrum se sk.p. (31) max. časy	0.0439	0.28	0.0521	2.67	1.40	4.40	0.74	0.86
ρ -centrum se sk.p. (36) střední časy	0.0224	0.34	0.1606	1.25	0.88	1.78	0.06	0.25
ρ -cetrum se sk.p. (36) max. časy	0.0307	0.12	0.0369	2.85	1.90	4.40	0.51	0.72
maxisum ρ -disperze střední časy	0.0370	0.49	0.2186	1.28	0.88	2.18	0.13	0.35
maxisum ρ -disperze max. časy	0.0725	0.43	0.1735	2.94	1.70	4.50	0.61	0.78

maximin ρ -disperze střední časy	0.0454	0.58	0.3831	1.56	0.80	2.08	0.11	0.33
maximin ρ -disperze max. časy	0.1736	0.53	0.3645	4.32	1.50	6.70	1.65	1.29

5 Závěr

Ve své bakalářské práci jsem zkoumala různé druhy modelů diskrétních lokačních úloh, jejich možné využití v reálních situacích a zabývala se řešením modelů těchto úloh na základě modelových případových úloh. Ve své diplomové práci jsem se rozhodla pokračovat v lokační analýze, ale s zaměřením na méně známé a výpočetně složitější modely tedy spojitě lokační úlohy. Jejich složitost je založena na spojitých veličinách, které udávají možné rozmístění zdrojů v území, což pochopitelně dělá jejich výpočet náročnějším v srovnání s diskrétními úlohami, kde počet lokalit na umístění zdrojů je omezený a přesně daný. Ale vzhledem k tomu, že jsem měla za cíl ulehčit nebo případně najít nějaký jiný možný výpočetní nástroj pro spojitě lokační úlohy a maximálně silně je přiblížit realitě a k využívání těchto modelů v reálném světě, zkusila jsem vyřešit vybrané modely spojitě lokační analýzy procesem diskretizace.

Proces diskretizace byl vyzkoušen na dvou opačných typech úloh – na úloze se žádoucími zdroji a nežádoucími zdroji. Zkoumanými typy úloh s žádoucími zdroji byly úlohy typu p -centrum a p -medián, které mají za cíl minimalizaci vzdálenosti mezi zákazníky a umístěnými zdroji nezávisle na nákladech vzniklých v systému. Za účelem širšího následného posouzení výpočetních časů a dalších statistických ukazatelů na modelech bylo rozhodnuto využít v modelech s žádoucími zdroji dva typy vazebních podmínek, které se v literatuře vyskytují. Zkoumanými úlohy s nežádoucími zdroji byly úlohy typu p -disperze maxisum a p -disperze maximin, které mají maximalizovat vzdálenosti mezi zákazníky a umístěnými zdroji nezávisle na nákladech vzniklých v systému. Na základě modelového zájmového území byl následně proveden proces jeho diskretizace a byly vyřešeny modely všech typů úloh lišících se různým stupněm diskretizace.

Při posouzení výpočetních časů spojitých lokačních modelů byly vytvořeny regresní přímky v grafickém a matematickém tvaru, byly vypočítány takové výběrové charakteristiky jako výběrový průměr, výběrový rozptyl, výběrová směrodatná odchylka, minimální a maximální hodnoty a bylo provedeno srovnání hodnot výpočetních časů.

Z pohledu trendu regresní přímky vykazovaly všechny modely, kromě modelu úlohy typu p -medián s výpočetně komplikovanějšími vazebními podmínkami, mírně rostoucí trend a bylo možno pozorovat poměrně nízké hodnoty regresních koeficientů kromě modelů s umístěním nežádoucích zdrojů, které měly ukázat závislosti mezi výpočetními časy a počtem lokalit. V daném případě je možno konstatovat, že rozsah řešených úloh byl příliš malý na to, aby potvrdil, že s rostoucím počtem lokalit se zásadním způsobem zvyšuje výpočetní čas.

Bylo ale zjištěno, že v případě úloh, které mají za cíl minimalizaci nebo maximalizaci celkové vzdálenosti mezi zákazníky a umístěnými zdroji, tedy u úloh typu p -medián a p -disperze maxisum, se vyskytovaly kratší výpočetní časy. Dále bylo ukázáno, že úlohy typu p -centrum a p -disperze maximin byly výpočetně náročnější s výjimkou modelů úloh typu p -centrum s výpočetně

komplikovanějšími vazebními podmínky, ale tuto skutečnost lze vysvětlit tím, že v případě modelů úloh typu p -centrum druh vazební podmínky neovlivnil výpočetní čas.

Výsledky diplomové práce ukázaly, že úlohy, i když mají stejný společný cíl, tedy minimalizaci nebo maximalizaci vzdálenosti, se chovají velmi odlišně jedna od druhé v rámci posouzení stejného parametru a jistější tvrzení ohledně dané problematiky jsou možná jen v případě dalšího zkoumání úloh s většími rozsahy.

Literatura

- 1) AYDINONAT, N.E a E.KOKSAL, *Explanatory value in context: the curious case of Hotelling's location model. European Journal of the History of Economic Thought.* 2019, **26** (5), 879-910. ISSN 0967-2567. DOI 10.1080/09672567.2019.1626460. Dostupné z : EBSCOhost.
- 2) BRUNO, G., A.GENOVESE a G.IMPROTA. *A historical perspective on location problems. BSHM Bulletin : Journal of the British Society for the History of Mathematics,* 2014, **29** (2), 83-97. ISSN 1749-8430. DOI 10.1080/17498430.2014.889266. Dostupné z : EBSCOhost.
- 3) CHURCH, R. a R.S.GARGINGEL. *Locating an Obnoxious Facility on a Network. Transportation Science,* 1978, **12** (2), 107-118. ISSN 0041-1655. DOI 10.1287/trsc.12.2.107. Dostupné z : EBSCOhost.
- 4) COOPER, L. *Location-allocation problems. Operations Research.* 1963, **11** (3), 331-343. DOI 10.1287/opre.11.3.331. Dostupné z : EBSCOhost.
- 5) DANTZIG, G.B. *Linear Programming. Operations Research.* 2002, **50** (1), 42-47. ISSN 0030-364X. DOI 10.1287/opre.50.1.42.17798. Dostupné z : SpringerLink.
- 6) DURMAZ, E., A.NECATI a I.K.ALTINEL. *Discrete approximation heuristics for the capacitated continuous location–allocation problem with probabilistic customer locations. Elsevier Ltd: Computers & Operations Research.* 2009, **36** (7), 2139-2148. ISSN 0305-0548. DOI 10.1016/j.cor.2008.08.003. Dostupné z : ScienceDirect.
- 7) ERKUT, E. a S.NEUMAN. *Analytical models for locating undesirable facilities. Elsevier Science Publishers B.V: European Journal of Operational Research.* 1989, **40** (3), 275-291. ISSN 0377-2217. DOI 10.1016/0377-2217(89)90420-7. Dostupné z : ScienceDirect
- 8) FABBRI, R.,L.D.F.COSTA, J.C.TOPELLI a O.M.BRUNO. *2D Euclidean distance transform algorithms: a comparative survey. ACM Computing Surveys.* 2008, **40** (1), 1-44. DOI 10.1145/1322432.1322434. Dostupné z : ACM Digital Library.
- 9) FRENK J.B.G., J.GROMICHO a S.ZHANG. *General models in Min-Max Continuous Location:Theory and Solution Techniques. Journal of Optimization Theory and Applications.* 1996, **89** (1), 39-63. DOI 10.1007/BF02192640. Dostupné z : SpringerLink.
- 10) GHADERI, A., M.S.JABALAMELI a F.BARZINPOUR . *Algorithm for Solving the Uncapacitated Continuous Location-Allocation Problem. Netw Spat Econ.* 2012, **12** (1), 421-439. DOI 10.1007/s11067-011-9162-y. Dostupné z : SpringerLink.
- 11) HAKIMI, S.L. *Optimum Locations of Switching Centers and the Absolute Centers and Medians of a Graph. Operations Research,* 1964, **12** (3), 450-459. ISSN 0030-364X. DOI 10.1287/opre.12.3.450. Dostupné z : EBSCOhost.
- 12) HAKIMI S.L., a S.N. MAHESHWARI. *Optimum Locations of Centers in Networks. Operations Research,* 1972, **20** (5), 967-973. DOI 10.1287/opre.20.5.967. Dostupné z : INFORMS.
- 13) HESSE OWEN S. a M.S.DASKIN. *Strategic facility location: A review. Elsevier Science V.B: European Journal of Operational Research.* 1998, **111** (3), 423-447. ISSN 0377-2217. DOI 10.1016/S0377-2217(98)00186-6. Dostupné z : ScienceDirect.
- 14) IVANOV A., A.TROPIN a A.TUZHOLIN. *Fermat–Steiner problem in the metric space of compact sets endowed with Hausdorff distance. Journal of Geometry.* 2016, **108** (1), 575-590. DOI 10.1007/s00022-016-0360-0. Dostupné z : SpringerLink.
- 15) JANÁČEK J. *Optimalizace na dopravních sítích.* Žilina : Žilinská univerzita v Žilině.2002,248 s. ISBN 80-8070-031-1.
- 16) JIRSA J. *Optimalizace umístění skladů audiovizuální techniky ČSOB.* Praha : ČVUT 2017. Diplomová práce, ČVUT, Fakulta dopravní, Ústav logistiky a managementu dopravy.
- 17) KLOSE, A. and A. DREXL. *Facility location models for distribution system design. Elsevier B.V: European Journal of Operational Research,* 2005, **162** (1), 4-29. ISSN 0377-2217. DOI 10.1016/j.ejor.2003.10.031. Dostupné z : ScienceDirect.

- 18) KOZLOVSKA O. Typologie diskretních lokačních úloh. Praha : ČVUT 2019. Bakalářská práce, ČVUT, Fakulta dopravní, Ústav řízení dopravních procesů a logistiky.
- 19) LORENA, L.A.N. a E.L.F. SENNE. *A column generation approach to capacitated p-median problems*. Elsevier Ltd: *Computers and Operations Research*, 2004, **31** (6), 863-876. ISSN 0305-0548. DOI 10.1016/S0305-0548(03)00039-X.
- 20) MLADENOVÍČ, N., J.BRIMBERG, P.HANSEN a J.A.MORENO-PÉREZ. *The p-median problem: A survey of metaheuristic approaches*. Elsevier B.V: *European Journal of Operational Research*. 2007, **179** (3), 927-939. ISSN 0377-2217. DOI 10.1016/j.ejor.2005.05.034. Dostupné z : ScienceDirect.
- 21) NAGY I. a P.PECKERKOVÁ. *Statistika*. Praha : ČVUT, Ústav aplikované matematiky.
- 22) NEEMA, M.N., K.M.MANIRUZZAMAN a A.K.OHGAI. *New Genetic Algorithms Based Approaches to Continuous p-Median Problem*. *Netw Spat Econ*. 2011, **11** (1), 83-99. DOI 10.1007/s11067-008-9084-5. Dostupné z : SpringerLink.
- 23) PECKERKOVÁ P., JOZOVÁ Š. a I.NAGY. *Lineární programování I*. Praha : ČVUT, Ústav aplikované matematiky.
- 24) PLASTRIA, F. *Continuous location problems: Research, results and questions in facility location: a survey of applications and methods*. 1995. Dostupné z : SpringerLink.
- 25) RAINER E.B., M.GALAVII a E.GASSNER. *The inverse Fermat–Weber problem*. Elsevier B.V. *European Journal of Operational Research*. 2010, **206** (1), 11-17. ISSN 0377-2217. DOI 10.1016/j.ejor.2010.01.046. Dostupné z : ScienceDirect.
- 26) RAKAS, J., D.TEODOROVÍČ a T.KIM. *Multi-objective modeling for determining location of undesirable facilities*. Elsevier Ltd: *Transportation Research Part D: Transport and Environment*. 2004, **9** (2), 125-138. ISSN 1361-9209. DOI 10.1016/j.trd.2003.09.002. Dostupné z : ScienceDirect.
- 27) TEICHMANN, D., A. GROSSO a M.IVAN. *Modely pro řešení rozhodovacích úloh v logistice I*. Ostrava: *Technická univerzita Ostrava*.
- 28) VOLEK J. a B.LINDA. *Teorie grafů – aplikace v dopravě a veřejné správě*. Pardubice : Univerzita Pardubice, dopravní fakulta Jana Pernera.
- 29) Xpress-IVE. *FICO* [software]. [přístup 17. března 2021].1983.Dostupné z: <https://www.fico.com>.
- 30) Xpress-IVE. *In: Wikipedia: the free encyclopedia [online]. St. Petersburg (Florida): Wikipedia Foundation, 11. 12. 2006, last edited on 25. 3. 2019 [cit. 2021-04-21]. Dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/FICO_Xpress.*
- 31) YAGIURA M., M.KISHIDA a T.IBAKARI. *A 3-flip neighborhood local search for the set covering problem*. Elsevier B.V. *European Journal of Operational Research*. 2006, **172** (2), 472-499. ISSN 0377-2217. DOI 10.1016/j.ejor.2004.10.018. Dostupné z : ScienceDirect.

Seznam obrázků

Obrázek č.1 – Schématické znázornění rozmístění dvou kiosků podle problému Hotellinga.....	10
Obrázek č.2 – Umístění zákazníků v území (grafické znázornění).....	36
Obrázek č. 3 – Umístění zákazníků a 12 lokalit v území (grafické znázornění).....	38
Obrázek č. 4 – Ukázka pracovního prostředí optimalizačního software Xpress-IVE.....	40
Obrázek č. 5 – Záložka Output/Input software Xpress-IVE.....	42
Obrázek č.6 – Záložka Stats software Xpress-IVE.....	42
Obrázek č.7 – Regresní přímka – příklad.....	54
Obrázek č. 8 – Průběh výpočetního času v úloze typu p-medián se skupinou podmínek (23).....	57
Obrázek č. 9 – Průběh výpočetního času v úloze typu p-medián se skupinou podmínek (27).....	58
Obrázek č. 10 – Přehled procentuálních rozdílů výpočetních časů úloh typu p-medián obsahující skupinu podmínek (23) ve srovnání s úlohou typu p-medián obsahující skupinu podmínek (27).....	60
Obrázek č.11 – Průběh výpočetního času úlohy p-centrum se skupinou podmínek (31).....	61
Obrázek č.12 – Průběh výpočetního času úlohy p-centrum se skupinou podmínek (36).....	61
Obrázek č.13 – Přehled procentuálních rozdílů výpočetních časů úloh typu p-centrum obsahující skupinu podmínek (31) ve srovnání s úlohou typu p-centrum obsahující skupinu podmínek (36).....	63
Obrázek č.14 – Přehled procentuálních rozdílů výpočetních časů úloh typu p-medián obsahující skupinu podmínek (23) ve srovnání s úlohou typu p-centrum obsahující skupinu podmínek (31).....	64
Obrázek č.15 – Přehled procentuálních rozdílů výpočetních časů úloh typu p-medián obsahující skupinu podmínek (27) ve srovnání s úlohou typu p-centrum obsahující skupinu podmínek (36).....	65
Obrázek č.16 – Průběh výpočetního času v úloze typu maxisum p-disperze.....	66
Obrázek č.17 – Průběh výpočetního času v úloze typu maximin p-disperze 65	65
Obrázek č.18 – Přehled procentuálních rozdílů výpočetních časů úloh typu p-disperse maxisum a p-disperse maximin.....	68

Seznam tabulek

Tabulka č. 1 – Umístění zákazníků v území (znázornění pomoci X a Y souřadnic).....	35
Tabulka č. 2 – Umístění 12 lokalit v území (znázornění pomoci X a Y souřadnic).....	37
Tabulka č. 3 – Distanční matice pro 12 lokalit.....	39
Tabulka č. 4 – Srovnání výpočetního času úlohy p-medián pro různý počet vhodných lokalit v území pro skupinu podmínek (23).....	44
Tabulka č. 5 – Srovnání výpočetního času úlohy p-medián pro různý počet vhodných lokalit v území pro skupinu podmínek (27).....	45
Tabulka č. 6 – Srovnání výpočetního času úlohy p-centrum pro různý počet vhodných lokalit v území pro skupinu podmínek (31).....	47
Tabulka č. 7 – Srovnání výpočetního času úlohy pcentrum pro různý počet vhodných lokalit v území pro skupinu podmínek (36).....	48
Tabulka č. 8 – Srovnání výpočetního času úlohy maxisum p-disperze pro různý počet vhodných lokalit v území.....	50
Tabulka č. 9 – Srovnání výpočetního času maximin p-disperze pro různý počet vhodných lokalit v území.....	52
Tabulka č. 10 – Shrnutí hlavních statistických ukazatelů pro všechny zkoumané spojitě lokační úlohy.....	69

Přílohy

Příloha č.1 – Distanční matice z textu programu pro řešení úlohy typu *p* medián

d::[4.85, 11, 18.2, 25.56, 14.27, 17.35, 22.61, 28.87, 24.16, 26.1, 29.85, 34.84, 8.31, 9.57, 15.05, 21.77, 3.01, 5.62, 12.91, 20.35, 12.21, 13.10, 17.51, 23.54, 35.53, 30.66, 27.02, 25.15, 29.37, 23.24, 18.27, 15.25, 25.74, 18.44, 11.4, 5.71, 13.75, 11.03, 12.91, 18, 8.31, 1.25, 6.82, 14.29, 12.21, 9.03, 11.25, 16.85, 4.07, 9.17, 16.25, 23.59, 6.05, 10.2, 16.85, 24.01, 16.02, 18, 22.45, 28.22, 14.56, 7.39, 3.09, 8.78, 19.29, 14.65, 13.02, 15.4, 27.06, 23.97, 23.01, 24.43, 27.14, 21.07, 16.25, 14.02, 23.59, 16.25, 9.17, 4.07, 24.01, 16.85, 10.20, 6.05, 19.2, 21.59, 26, 31.6, 9.41, 13.64, 19.9, 26.81, 2.93, 10.3, 17.78, 25.27, 24.25, 16.75, 9.25, 1.75, 26.23, 19.51, 13.62, 10.15, 31.43, 26.09, 22.04, 20.08, 25.63, 20.97, 18.29, 18.49, 19.93, 13.4, 8.63, 9.06, 18.36, 10.93, 3.82, 4.7, 26.06, 23.49, 23.16, 25.18, 17.86, 13.84, 13.29, 16.55, 12.61, 5.62, 4.07, 10.68, 9.41, 6.01, 9.8, 16.39, 8.28, 4.01, 8.72, 15.77, 15.77, 14, 16, 20.7, 20.26, 20.45, 23.20, 27.76, 10.51, 10.87, 15.43, 21.69, 3.25, 4.25, 11.75, 19.25, 17.96, 10.96, 5.48, 7.25, 17.96, 10.96, 5.48, 7.25, 22.86, 17.89, 15.17, 15.89, 25.1, 25.55, 28.06, 32.17, 15.17, 15.89, 19.69, 25.2, 5.48, 7.25, 13.7, 20.86, 3.4, 4.37, 11.79, 19.28, 11.47, 11.79, 16.1, 22.17, 21.25, 21.43, 24.06, 28.49, 9.72, 3.47, 6.49, 13.59, 11.6, 7.22, 9.06, 14.99, 19.35, 17.09, 17.95, 21.55, 27.54, 20.88, 15.04, 11.34, 25.27, 17.78, 10.3, 2.93, 26.81, 19.9, 13.64, 9.41, 15.48, 9.85, 8.19, 12.23, 13.4, 6.09, 2.66, 9.46, 17.88, 13.31, 12.13, 15.15, 16.05, 17.18, 21.1, 26.6, 6.13, 8.66, 15, 22.08, 4.19, 7.42, 14.32, 21.62, 16.25, 15.05, 17.37, 22.11, 8, 5.15, 10.08, 17, 8, 5.15, 10.08, 17, 28.98, 25.55, 24.03, 24.8, 21.45, 16.51, 14.06, 15.33, 16.74, 9.62, 4.19, 7.42, 23.08, 16.43, 10.96, 9.09, 21.27, 13.79, 6.33, 1.6, 23.93, 17.61, 12.65, 11.07,

22.08, 19.37, 19.37, 22.08, 14.41, 9.75, 9.75, 14.41, 11.29, 3.88, 3.88, 11.29,
33, 27.41, 22.95, 20.35, 28.09, 21.25, 15.05, 10.68, 26.25, 18.75, 11.25, 3.75,
20.64, 13.36, 6.6, 4.59, 21.12, 14.09, 7.97, 6.41, 25.81, 20.46, 16.84, 16.16,
26.72, 19.41, 12.31, 6.25, 30.23, 24.01, 18.75, 15.46, 36.25, 31.25, 27.41, 25.28,
7.08, 12.75, 19.69, 26.93, 5.48, 11.94, 19.17, 26.55, 14.49, 17.96, 23.4, 29.75,
15.05, 10.68, 10.68, 15.05, 11.25, 3.75, 3.75, 11.25, 15.05, 10.68, 10.68, 15.05,
18.68, 11.47, 5.15, 5.84, 23, 17.65, 14.37, 14.63, 30.15, 26.3, 24.22, 24.37,
14.02, 16.25, 21.07, 27.14, 4.07, 9.17, 16.25, 23.59, 6.05, 10.2, 16.85, 24.01,
24.22, 24.37, 26.72, 30.77, 14.37, 14.63, 18.28, 23.8, 5.15, 5.84, 12.41, 19.66,
25.77, 19.66, 14.88, 13, 22.45, 15.05, 7.85, 3.01, 23.33, 16.33, 10.08, 7,
6.25, 12.31, 19.41, 26.72, 15.46, 18.75, 24.01, 30.23, 25.28, 27.41, 31.25, 36.25,
12.21, 13.1, 17.51, 23.54, 3.01, 5.62, 12.91, 20.35, 8.31, 9.57, 15.05, 21.77,
15.38, 8, 2.02, 7.52, 17.22, 11.14, 8, 10.8, 23.59, 19.6, 18, 19.41]

Příloha č.2 – Distanční matice z textu programu pro řešení úlohy typu *p* centum

d::[4.85, 11, 18.2, 25.56, 14.27, 17.35, 22.61, 28.87, 24.16, 26.1, 29.85, 34.84,
8.31, 9.57, 15.05, 21.77, 3.01, 5.62, 12.91, 20.35, 12.21, 13.10, 17.51, 23.54,
35.53, 30.66, 27.02, 25.15, 29.37, 23.24, 18.27, 15.25, 25.74, 18.44, 11.4, 5.71,
13.75, 11.03, 12.91, 18, 8.31, 1.25, 6.82, 14.29, 12.21, 9.03, 11.25, 16.85,
4.07, 9.17, 16.25, 23.59, 6.05, 10.2, 16.85, 24.01, 16.02, 18, 22.45, 28.22,
14.56, 7.39, 3.09, 8.78, 19.29, 14.65, 13.02, 15.4, 27.06, 23.97, 23.01, 24.43,
27.14, 21.07, 16.25, 14.02, 23.59, 16.25, 9.17, 4.07, 24.01, 16.85, 10.20, 6.05,
19.2, 21.59, 26, 31.6, 9.41, 13.64, 19.9, 26.81, 2.93, 10.3, 17.78, 25.27,
24.25, 16.75, 9.25, 1.75, 26.23, 19.51, 13.62, 10.15, 31.43, 26.09, 22.04, 20.08,
25.63, 20.97, 18.29, 18.49, 19.93, 13.4, 8.63, 9.06, 18.36, 10.93, 3.82, 4.7,
26.06, 23.49, 23.16, 25.18, 17.86, 13.84, 13.29, 16.55, 12.61, 5.62, 4.07, 10.68,

9.41, 6.01, 9.8, 16.39, 8.28, 4.01, 8.72, 15.77, 15.77, 14, 16, 20.7,
20.26, 20.45, 23.20, 27.76, 10.51, 10.87, 15.43, 21.69, 3.25, 4.25, 11.75, 19.25,
17.96, 10.96, 5.48, 7.25, 17.96, 10.96, 5.48, 7.25, 22.86, 17.89, 15.17, 15.89,
25.1, 25.55, 28.06, 32.17, 15.17, 15.89, 19.69, 25.2, 5.48, 7.25, 13.7, 20.86,
3.4, 4.37, 11.79, 19.28, 11.47, 11.79, 16.1, 22.17, 21.25, 21.43, 24.06, 28.49,
9.72, 3.47, 6.49, 13.59, 11.6, 7.22, 9.06, 14.99, 19.35, 17.09, 17.95, 21.55,
27.54, 20.88, 15.04, 11.34, 25.27, 17.78, 10.3, 2.93, 26.81, 19.9, 13.64, 9.41,
15.48, 9.85, 8.19, 12.23, 13.4, 6.09, 2.66, 9.46, 17.88, 13.31, 12.13, 15.15,
16.05, 17.18, 21.1, 26.6, 6.13, 8.66, 15, 22.08, 4.19, 7.42, 14.32, 21.62,
16.25, 15.05, 17.37, 22.11, 8, 5.15, 10.08, 17, 8, 5.15, 10.08, 17,
28.98, 25.55, 24.03, 24.8, 21.45, 16.51, 14.06, 15.33, 16.74, 9.62, 4.19, 7.42,
23.08, 16.43, 10.96, 9.09, 21.27, 13.79, 6.33, 1.6, 23.93, 17.61, 12.65, 11.07,
22.08, 19.37, 19.37, 22.08, 14.41, 9.75, 9.75, 14.41, 11.29, 3.88, 3.88, 11.29,
33, 27.41, 22.95, 20.35, 28.09, 21.25, 15.05, 10.68, 26.25, 18.75, 11.25, 3.75,
20.64, 13.36, 6.6, 4.59, 21.12, 14.09, 7.97, 6.41, 25.81, 20.46, 16.84, 16.16,
26.72, 19.41, 12.31, 6.25, 30.23, 24.01, 18.75, 15.46, 36.25, 31.25, 27.41, 25.28,
7.08, 12.75, 19.69, 26.93, 5.48, 11.94, 19.17, 26.55, 14.49, 17.96, 23.4, 29.75,
15.05, 10.68, 10.68, 15.05, 11.25, 3.75, 3.75, 11.25, 15.05, 10.68, 10.68, 15.05,
18.68, 11.47, 5.15, 5.84, 23, 17.65, 14.37, 14.63, 30.15, 26.3, 24.22, 24.37,
14.02, 16.25, 21.07, 27.14, 4.07, 9.17, 16.25, 23.59, 6.05, 10.2, 16.85, 24.01,
24.22, 24.37, 26.72, 30.77, 14.37, 14.63, 18.28, 23.8, 5.15, 5.84, 12.41, 19.66,
25.77, 19.66, 14.88, 13, 22.45, 15.05, 7.85, 3.01, 23.33, 16.33, 10.08, 7,
6.25, 12.31, 19.41, 26.72, 15.46, 18.75, 24.01, 30.23, 25.28, 27.41, 31.25, 36.25,
12.21, 13.1, 17.51, 23.54, 3.01, 5.62, 12.91, 20.35, 8.31, 9.57, 15.05, 21.77,
15.38, 8, 2.02, 7.52, 17.22, 11.14, 8, 10.8, 23.59, 19.6, 18, 19.41]

Příloha č.3 – Distanční matice z textu programu pro řešení úlohy typu maxisum p disperze

$d::$ [4.85, 11, 18.2, 25.56, 14.27, 17.35, 22.61, 28.87, 24.16, 26.1, 29.85, 34.84, 8.31, 9.57, 15.05, 21.77, 3.01, 5.62, 12.91, 20.35, 12.21, 13.10, 17.51, 23.54, 35.53, 30.66, 27.02, 25.15, 29.37, 23.24, 18.27, 15.25, 25.74, 18.44, 11.4, 5.71, 13.75, 11.03, 12.91, 18, 8.31, 1.25, 6.82, 14.29, 12.21, 9.03, 11.25, 16.85, 4.07, 9.17, 16.25, 23.59, 6.05, 10.2, 16.85, 24.01, 16.02, 18, 22.45, 28.22, 14.56, 7.39, 3.09, 8.78, 19.29, 14.65, 13.02, 15.4, 27.06, 23.97, 23.01, 24.43, 27.14, 21.07, 16.25, 14.02, 23.59, 16.25, 9.17, 4.07, 24.01, 16.85, 10.20, 6.05, 19.2, 21.59, 26, 31.6, 9.41, 13.64, 19.9, 26.81, 2.93, 10.3, 17.78, 25.27, 24.25, 16.75, 9.25, 1.75, 26.23, 19.51, 13.62, 10.15, 31.43, 26.09, 22.04, 20.08, 25.63, 20.97, 18.29, 18.49, 19.93, 13.4, 8.63, 9.06, 18.36, 10.93, 3.82, 4.7, 26.06, 23.49, 23.16, 25.18, 17.86, 13.84, 13.29, 16.55, 12.61, 5.62, 4.07, 10.68, 9.41, 6.01, 9.8, 16.39, 8.28, 4.01, 8.72, 15.77, 15.77, 14, 16, 20.7, 20.26, 20.45, 23.20, 27.76, 10.51, 10.87, 15.43, 21.69, 3.25, 4.25, 11.75, 19.25, 17.96, 10.96, 5.48, 7.25, 17.96, 10.96, 5.48, 7.25, 22.86, 17.89, 15.17, 15.89, 25.1, 25.55, 28.06, 32.17, 15.17, 15.89, 19.69, 25.2, 5.48, 7.25, 13.7, 20.86, 3.4, 4.37, 11.79, 19.28, 11.47, 11.79, 16.1, 22.17, 21.25, 21.43, 24.06, 28.49, 9.72, 3.47, 6.49, 13.59, 11.6, 7.22, 9.06, 14.99, 19.35, 17.09, 17.95, 21.55, 27.54, 20.88, 15.04, 11.34, 25.27, 17.78, 10.3, 2.93, 26.81, 19.9, 13.64, 9.41, 15.48, 9.85, 8.19, 12.23, 13.4, 6.09, 2.66, 9.46, 17.88, 13.31, 12.13, 15.15, 16.05, 17.18, 21.1, 26.6, 6.13, 8.66, 15, 22.08, 4.19, 7.42, 14.32, 21.62, 16.25, 15.05, 17.37, 22.11, 8, 5.15, 10.08, 17, 8, 5.15, 10.08, 17, 28.98, 25.55, 24.03, 24.8, 21.45, 16.51, 14.06, 15.33, 16.74, 9.62, 4.19, 7.42, 23.08, 16.43, 10.96, 9.09, 21.27, 13.79, 6.33, 1.6, 23.93, 17.61, 12.65, 11.07, 22.08, 19.37, 19.37, 22.08, 14.41, 9.75, 9.75, 14.41, 11.29, 3.88, 3.88, 11.29, 33, 27.41, 22.95, 20.35, 28.09, 21.25, 15.05, 10.68, 26.25, 18.75, 11.25, 3.75,

20.64, 13.36, 6.6, 4.59, 21.12, 14.09, 7.97, 6.41, 25.81, 20.46, 16.84, 16.16,
26.72, 19.41, 12.31, 6.25, 30.23, 24.01, 18.75, 15.46, 36.25, 31.25, 27.41, 25.28,
7.08, 12.75, 19.69, 26.93, 5.48, 11.94, 19.17, 26.55, 14.49, 17.96, 23.4, 29.75,
15.05, 10.68, 10.68, 15.05, 11.25, 3.75, 3.75, 11.25, 15.05, 10.68, 10.68, 15.05,
18.68, 11.47, 5.15, 5.84, 23, 17.65, 14.37, 14.63, 30.15, 26.3, 24.22, 24.37,
14.02, 16.25, 21.07, 27.14, 4.07, 9.17, 16.25, 23.59, 6.05, 10.2, 16.85, 24.01,
24.22, 24.37, 26.72, 30.77, 14.37, 14.63, 18.28, 23.8, 5.15, 5.84, 12.41, 19.66,
25.77, 19.66, 14.88, 13, 22.45, 15.05, 7.85, 3.01, 23.33, 16.33, 10.08, 7,
6.25, 12.31, 19.41, 26.72, 15.46, 18.75, 24.01, 30.23, 25.28, 27.41, 31.25, 36.25,
12.21, 13.1, 17.51, 23.54, 3.01, 5.62, 12.91, 20.35, 8.31, 9.57, 15.05, 21.77,
15.38, 8, 2.02, 7.52, 17.22, 11.14, 8, 10.8, 23.59, 19.6, 18, 19.41]

Příloha č.4 – Distanční matice z textu programu pro řešení úlohy typu maximin p disperze

$d::$ [4.85, 11, 18.2, 25.56, 14.27, 17.35, 22.61, 28.87, 24.16, 26.1, 29.85, 34.84,
8.31, 9.57, 15.05, 21.77, 3.01, 5.62, 12.91, 20.35, 12.21, 13.10, 17.51, 23.54,
35.53, 30.66, 27.02, 25.15, 29.37, 23.24, 18.27, 15.25, 25.74, 18.44, 11.4, 5.71,
13.75, 11.03, 12.91, 18, 8.31, 1.25, 6.82, 14.29, 12.21, 9.03, 11.25, 16.85,
4.07, 9.17, 16.25, 23.59, 6.05, 10.2, 16.85, 24.01, 16.02, 18, 22.45, 28.22,
14.56, 7.39, 3.09, 8.78, 19.29, 14.65, 13.02, 15.4, 27.06, 23.97, 23.01, 24.43,
27.14, 21.07, 16.25, 14.02, 23.59, 16.25, 9.17, 4.07, 24.01, 16.85, 10.20, 6.05,
19.2, 21.59, 26, 31.6, 9.41, 13.64, 19.9, 26.81, 2.93, 10.3, 17.78, 25.27,
24.25, 16.75, 9.25, 1.75, 26.23, 19.51, 13.62, 10.15, 31.43, 26.09, 22.04, 20.08,
25.63, 20.97, 18.29, 18.49, 19.93, 13.4, 8.63, 9.06, 18.36, 10.93, 3.82, 4.7,
26.06, 23.49, 23.16, 25.18, 17.86, 13.84, 13.29, 16.55, 12.61, 5.62, 4.07, 10.68,
9.41, 6.01, 9.8, 16.39, 8.28, 4.01, 8.72, 15.77, 15.77, 14, 16, 20.7,
20.26, 20.45, 23.20, 27.76, 10.51, 10.87, 15.43, 21.69, 3.25, 4.25, 11.75, 19.25,

17.96, 10.96, 5.48, 7.25, 17.96, 10.96, 5.48, 7.25, 22.86, 17.89, 15.17, 15.89,
25.1, 25.55, 28.06, 32.17, 15.17, 15.89, 19.69, 25.2, 5.48, 7.25, 13.7, 20.86,
3.4, 4.37, 11.79, 19.28, 11.47, 11.79, 16.1, 22.17, 21.25, 21.43, 24.06, 28.49,
9.72, 3.47, 6.49, 13.59, 11.6, 7.22, 9.06, 14.99, 19.35, 17.09, 17.95, 21.55,
27.54, 20.88, 15.04, 11.34, 25.27, 17.78, 10.3, 2.93, 26.81, 19.9, 13.64, 9.41,
15.48, 9.85, 8.19, 12.23, 13.4, 6.09, 2.66, 9.46, 17.88, 13.31, 12.13, 15.15,
16.05, 17.18, 21.1, 26.6, 6.13, 8.66, 15, 22.08, 4.19, 7.42, 14.32, 21.62,
16.25, 15.05, 17.37, 22.11, 8, 5.15, 10.08, 17, 8, 5.15, 10.08, 17,
28.98, 25.55, 24.03, 24.8, 21.45, 16.51, 14.06, 15.33, 16.74, 9.62, 4.19, 7.42,
23.08, 16.43, 10.96, 9.09, 21.27, 13.79, 6.33, 1.6, 23.93, 17.61, 12.65, 11.07,
22.08, 19.37, 19.37, 22.08, 14.41, 9.75, 9.75, 14.41, 11.29, 3.88, 3.88, 11.29,
33, 27.41, 22.95, 20.35, 28.09, 21.25, 15.05, 10.68, 26.25, 18.75, 11.25, 3.75,
20.64, 13.36, 6.6, 4.59, 21.12, 14.09, 7.97, 6.41, 25.81, 20.46, 16.84, 16.16,
26.72, 19.41, 12.31, 6.25, 30.23, 24.01, 18.75, 15.46, 36.25, 31.25, 27.41, 25.28,
7.08, 12.75, 19.69, 26.93, 5.48, 11.94, 19.17, 26.55, 14.49, 17.96, 23.4, 29.75,
15.05, 10.68, 10.68, 15.05, 11.25, 3.75, 3.75, 11.25, 15.05, 10.68, 10.68, 15.05,
18.68, 11.47, 5.15, 5.84, 23, 17.65, 14.37, 14.63, 30.15, 26.3, 24.22, 24.37,
14.02, 16.25, 21.07, 27.14, 4.07, 9.17, 16.25, 23.59, 6.05, 10.2, 16.85, 24.01,
24.22, 24.37, 26.72, 30.77, 14.37, 14.63, 18.28, 23.8, 5.15, 5.84, 12.41, 19.66,
25.77, 19.66, 14.88, 13, 22.45, 15.05, 7.85, 3.01, 23.33, 16.33, 10.08, 7,
6.25, 12.31, 19.41, 26.72, 15.46, 18.75, 24.01, 30.23, 25.28, 27.41, 31.25, 36.25,
12.21, 13.1, 17.51, 23.54, 3.01, 5.62, 12.91, 20.35, 8.31, 9.57, 15.05, 21.77,
15.38, 8, 2.02, 7.52, 17.22, 11.14, 8, 10.8, 23.59, 19.6, 18, 19.41]