Doktorandské přijímačky – výsledky

Příklad 1

Vypočtěte integrál $\displaystyle\int_0^1 \frac{3x\,\mathrm{d}x}{2x^2+5x+2}$. $\left[\frac{3}{2}\ln 3-\ln 4\,.\right]$

Vypočtěte integrál $\displaystyle\int_0^1 \frac{(4x+9)\,\mathrm{d}x}{2x^2-5x-3}$. $\left[3\ln 2-4\ln 3\,.\right]$

Vypočtěte integrál $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{(5-x)\,\mathrm{d}x}{3x^2+5x-2}$. $\left[-\frac{7}{3}\ln 2\,.\right]$

Vypočtěte integrál $\displaystyle\int_1^2 \frac{(x-4)\,\mathrm{d}x}{6x^2+x-2}$. $\left[\ln 4-\frac{1}{2}\ln 3-\frac{2}{3}\ln 5\,.\right]$

Vypočtěte integrál $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{(x-3)\,\mathrm{d}x}{6x^2-x-1}$. $\left[\frac{2}{3}\ln 2-\frac{1}{2}\ln 3-\frac{1}{6}\ln 5\,.\right]$

Vypočtěte integrál $\displaystyle\int_{-3}^{-1} \frac{(x+6)\,\mathrm{d}x}{4x^2-x-3}$. $\left[\frac{3}{2}\ln 3-\ln 2\,.\right]$

Vypočtěte integrál $\displaystyle\int_1^2 \frac{(2x-7)\,\mathrm{d}x}{4x^2+5x-6}$. $\left[2\ln 2-\ln 3-\frac{1}{2}\ln 5\,.\right]$

Vypočtěte integrál $\displaystyle\int_2^\infty \frac{2\,\mathrm{d}x}{4x^2-8x+3}$. $\left[\frac{1}{2}\ln 3\,.\right]$

Vypočtěte integrál $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{\mathrm{d}x}{6x^2+7x+2}$. $\left[\ln 3-\ln 2\,.\right]$

Vypočtěte integrál $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{7\,\mathrm{d}x}{6+x-2x^2}$. $\left[\ln 15\,.\right]$

Vypočtěte integrál $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{(13-6x)\,\mathrm{d}x}{3-7x-6x^2}$. $\left[2\ln 6\,.\right]$

Vypočtěte integrál $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x\,\mathrm{d}x}{(2x+3)^3}$. $\left[\frac{1}{24}\,.\right]$

Vypočtěte integrál $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{(x^2+1)\,\mathrm{d}x}{(x-1)^3}$. $\left[\frac{1}{4}-\ln 2\,.\right]$

Vypočtěte integrál $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{(4x^3+3)\,\mathrm{d}x}{(1-2x)^2}$. $\left[\frac{5}{3}-\frac{3}{4}\ln 3\,.\right]$

Vypočtěte integrál $\displaystyle\int_0^1 \frac{(4x^2+7)\,\mathrm{d}x}{(2x+1)^3}$. $\left[\frac{10}{9}+\frac{1}{2}\ln 3\,.\right]$

Příklad 2

Najdětete řešení Cauchyovy úlohy

$$x'' + 4x' + 5x = 0\,, \qquad x(0) = 1\,, \quad x'(0) = 3\,.$$

$$\left[x(t) = (\cos t + 5\sin t)\,\mathrm{e}^{-2t}\,.\right]$$

Najdětete řešení Cauchyovy úlohy

$$x'' + 2x' + 5x = 0\,, \qquad x(0) = 2\,, \quad x'(0) = 0\,.$$

$$\left[x(t) = (2\cos 2t + \sin 2t)\,\mathrm{e}^{-t}\,.\right]$$

Najdětete řešení Cauchyovy úlohy

$$x'' + 6x' + 10x = 0\,, \qquad x(0) = 1\,, \quad x'(0) = -1\,.$$

$$\left[x(t) = (\cos t + 2\sin t)\,\mathrm{e}^{-3t}\,.\right]$$

Najdětete řešení Cauchyovy úlohy

$$x'' + 2x' + 10x = 0\,, \qquad x(0) = -1\,, \quad x'(0) = 4\,.$$

$$\left[x(t) = (\sin 3t - \cos 3t)\,\mathrm{e}^{-t}\,.\right]$$

Najdětete řešení Cauchyovy úlohy

$$x'' + 4x' + 8x = 0\,, \qquad x(0) = 1\,, \quad x'(0) = 4\,.$$

$$\left[x(t) = (\cos 2t + 3\sin 2t)\,\mathrm{e}^{-2t}\,.\right]$$

Najdětete řešení Cauchyovy úlohy

$$x'' + 8x' + 17x = 0\,, \qquad x(0) = 1\,, \quad x'(0) = -2\,.$$

$$\left[x(t) = (\cos t + 2\sin t)\,\mathrm{e}^{-4t}\,.\right]$$

Najdětete řešení Cauchyovy úlohy

$$x'' + 6x' + 13x = 0\,, \qquad x(0) = 2\,, \quad x'(0) = -4\,.$$

$$\left[x(t) = (2\cos 2t + \sin 2t)\,\mathrm{e}^{-3t}\,.\right]$$

Najdětete řešení Cauchyovy úlohy

$$x'' + 4x' + 4x = 0\,, \qquad x(0) = 1\,, \quad x'(0) = 0\,.$$

$$\left[x(t) = (1+2t)\,\mathrm{e}^{-2t}\,.\right]$$

Najdětete řešení Cauchyovy úlohy

$$x'' - 6x' + 9x = 0\,, \qquad x(0) = 2\,, \quad x'(0) = 4\,.$$

$$\left[x(t) = 2(1-t)\,\mathrm{e}^{3t}\,.\right]$$

Najdětete řešení Cauchyovy úlohy

$$x'' + 6x' + 9x = 0\,, \qquad x(0) = -1\,, \quad x'(0) = 1\,.$$

$$\left[x(t) = -(1+2t)\,\mathrm{e}^{-3t}\,.\right]$$

Najdětete řešení Cauchyovy úlohy

$$x_1' = x_1 + 2x_2\,, \qquad x_2' = 3x_1 - 4x_2\,, \qquad x_1(0) = 3\,, \quad x_2(0) = 5\,.$$

$$\left[x_1(t) = 4\mathrm{e}^{2t} - \mathrm{e}^{-5t}\,, \qquad x_2(t) = 2\mathrm{e}^{2t} + 3\mathrm{e}^{-5t}\,.\right]$$

Najdětete řešení Cauchyovy úlohy

$$x_1' = 3x_1 - 2x_2\,, \qquad x_2' = 2x_1 - x_2\,, \qquad x_1(0) = 0\,, \quad x_2(0) = 1\,.$$

$$\left[x_1(t) = -2t\mathrm{e}^{t}\,, \qquad x_2(t) = (1-2t)\,\mathrm{e}^{t}\,.\right]$$

Najdětete řešení Cauchyovy úlohy

$$x_1' = 3x_1 - 2x_2\,, \qquad x_2' = 4x_1 - x_2\,, \qquad x_1(0) = 2\,, \quad x_2(0) = 1\,.$$

$$\left[x_1(t) = (2\cos 2t + \sin 2t)\,\mathrm{e}^{t}\,, \qquad x_2(t) = (\cos 2t + 3\sin 2t)\,\mathrm{e}^{t}\,.\right]$$

Najdětete řešení Cauchyovy úlohy

$$x_1' = x_1 - 5x_2\,, \qquad x_2' = 2x_1 - 5x_2\,, \qquad x_1(0) = 1\,, \quad x_2(0) = 2\,.$$

$$\left[x_1(t) = (\cos t - 7\sin t)\,\mathrm{e}^{-2t}\,, \qquad x_2(t) = 2(\cos t - 2\sin t)\mathrm{e}^{-2t}\,.\right]$$

Najdětete řešení Cauchyovy úlohy

$$x_1' = 3x_1 - 5x_2\,, \qquad x_2' = x_1 + x_2\,, \qquad x_1(0) = 0\,, \quad x_2(0) = 2\,.$$

$$\left[x_1(t) = -5\sin 2t\,\mathrm{e}^{2t}\,, \qquad x_2(t) = (2\cos 2t - \sin 2t)\,\mathrm{e}^{2t}\,.\right]$$

Příklad 3

Ze všech pravoúhlých trojúhelníků, které mají součet délek přepony a jedné odvěsny roven 3 m, určete ten, který má největší obsah.

$\Big[$odvěsny jsou 1 m a $\sqrt{3}$ m a délka přepony je 2 m.$\Big]$

Pro jaký poloměr r a výšku v bude mít uzavřená válcová nádoba s objemem $V = 16\pi\,\mathrm{m}^3$ nejmenší povrch? $\Big[r = 2\,\mathrm{m}\,, \quad v = 4\,\mathrm{m}\,.\Big]$

Do elipsy $9x^2 + 25y^2 = 450$ vepište obdélník, který má strany rovnoběžné s osami elipsy který má největší obsah. $\Big[$strany obdélníka mají délku 6 a 10.$\Big]$

Do koule s poloměrem R vepište válec, který má největší objemem.

$\Big[$poloměr válce je $r = \sqrt{\frac{2}{3}}\,R$ a jeho výška $v = \frac{2}{\sqrt{3}}\,R\,.\Big]$

Trojúhelník má základnu b a výška na tuto základnu je h. Vepište do něj obdélník, jehož jedna strana leží na základně a který má největší obsah.

$\Big[$strany obdélníka jsou $\frac{1}{2}\,b$ a $\frac{1}{2}\,h\,.\Big]$

Jaký je maximální objem kužele, který má délku strany pláště ℓ?

$\Big[$poloměr podstavy kužele je $r = \sqrt{\frac{2}{3}}\,\ell$, jeho výška $v = \frac{1}{\sqrt{3}}\,\ell$ a jeho objem $V = \frac{2}{9\sqrt{3}}\,\pi\ell^3\,.\Big]$

Najděte nejdelší sečnu elipsy $x^2 + 3y^2 = 12$, která prochází bodem $[0; -2]$.

$\Big[$sečna prochází bodem $[3; 1]$ nebo bodem $[-3; 1]\,.\Big]$

Na elipse $2x^2 + y^2 = 4$ najděte bod, pro který tečna elipsy sestrojená v tomto bodě spolu s osami souřadnic vymezuje trojúhelník s nejmenším obsahem.

$\Big[$v prvním kvadrantu je hledaný bod $\big[1; \sqrt{2}\big]\,.\Big]$

Továrna je vzdálena 10 km vzdušnou čarou od železnice, která vede z jihu na sever a prochází městem, které se nachází 40 km severně od továrny. Pod jakým úhlem φ k železnici je třeba sestrojit vlečku tak, aby náklady na přepravu z továrny do města byly nejmenší, jestliže přeprava tuny zboží na vzdálenost 1 km po železnici stojí 1 Kč a po vlečce 2 Kč. $\Big[\varphi = \frac{1}{3}\,\pi\,.\Big]$

Kolmo k řece šířky 8 m je přiveden kanál o šířce 1 m. Jakou maximální délku může mít kláda, kterou lze splavit z řeky do kanálu? $\Big[5\sqrt{5}\,\mathrm{m}\,.\Big]$

Hodinové náklady na přepravu se skládají ze dvou částí. První, konstantní, je rovna a Kč a druhá roste úměrně třetí mocnině rychlosti v, tj. je rovna kv^3, kde k je konstantní. Pro jakou rychlost bude přeprava nejekonomičtější? $\left[v = \sqrt[3]{\frac{a}{2k}}\,.\right]$

Při jakých rozměrech bude mít otevřená nádoba tvaru kvádru objemu 32 litrů minimální povrch? [dno nádoby je čtverec se stranou 4 dm a výška je 2 dm.]

Při jakých rozměrech bude mít otevřená vana s půlkruhovým průřezem, která má daný povrch $3\pi\,\mathrm{m}^2$, největší objem? [poloměr stěny je $r = 1\,\mathrm{m}$ a délka vany $d = 2\,\mathrm{m}$.]

Najděte obdélník s obvodem 12 cm, který vytvoří rotací kolem jedné své strany válec s největším objemem.

[obdélník rotuje kolem strany s délkou 2 cm, druhá strana je 4 cm.]

Bodem $[2; 5; 3]$ veďte rovinu P tak, aby byl objem čtyřstěnu, jehož vrcholy jsou počátek a prosečíky roviny P se souřadnicovými osami, co nejmenší.

[rovnice roviny je $\frac{1}{2}\,x + \frac{1}{5}\,y + \frac{1}{3}\,z = 3\,.$]
