Pravděpodobnost a matematická statistika

Příklady k přijímacím zkouškám na doktorské studium

1 Popisná statistika

1. **Příklad:**
   Určete aritmetický průměr dat, zadaných tabulkou hodnot x_i a četností n_i

x_i	1	2	3
n_i	15	60	25

2. **Příklad:**
   Určete medián z dat, zadaných tabulkou hodnot x_i a četností n_i

x_i	15	20	30
n_i	15	32	47

3. **Příklad:**
   Určete výběrovou směrodatnou odchylku z dat $x_i = \{2; 3; 5; 6; 9\}$.

2 Kombinatorika

1. **Příklad:**
   Kolika způsoby je na pětimístné lavici možno usadit pět osob, jestliže
   a) dvě z nich chtějí sedět vedle sebe,
   b) dvě z nich chtějí sedět vedle sebe na kraji lavice?

2. **Příklad:**
   V sérii je 8 dobrých a 2 vadné výrobky. Kolika způsoby lze vybrat čtyři výrobky tak, aby ve výběru byly alespoň dva dobré?

3. **Příklad:**
   Kolika způsoby lze na šachovnici vybrat tři pole tak, aby všechna ležela ve stejném sloupci.

3 Pravděpodobnost

1. **Příklad:**

   Přístroj se skládá ze 100 součástek, zapojených v sérii (tedy porucha libovolné z nich přístroj vyřadí z funkce). Pravděpodobnost poruchy libovolné ze součástek je rovna číslu p. S jakou pravděpodobností je přístroj v poruše?

2. **Příklad:**

   Na skladě je 100 výrobků. Kontrolou bylo zjištěno, že 12 výrobků má prošlou záruční lhůtu a 18 má poškozený obal. Dobrých výrobků bylo 75. Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraný výrobek má obě jmenované vady?

   (Nebo: ... výrobek nemá prošlou záruku, jestliže má nepoškozený obal)?

3. **Příklad:**

   Dva soupeři hází střídavě kostkou. Vyhrává ten, kdo první hodí šestku. Jaká je pravděpodobnost, že vyhraje ten, kdo začínal házet?

4. **Příklad:**

   Jaká je pravděpodobnost druhé výhry v sazce, tj. pravděpodobnost uhodnutí 5 čísel z 6 správných z celkového počtu 49 čísel?

4 Náhodná veličina

1. **Příklad:**

   Náhodná veličina má obor hodnot 1, 2 a 3. Platí $P(1) = 2p$, $P(2) = 0.5 - p$ a $P(3) = p$. Nakreslete pravděpodobnostní a distribuční funkci této náhodné veličiny.

2. **Příklad:**

   Náhodná veličina má hustotu pravděpodobnosti

   $$f(x) = 2^{-k}\sin(x) \qquad \text{pro} \quad x \in (0, \pi).$$

   Určete hodnotu reálné konstanty k.

3. **Příklad:**

   Náhodná veličina X má hustotu pravděpodobnosti $f(x) = 1/3$ na intervalu $x = (1; 4)$; jinde nula. Určete předpis pro distribuční funkci této náhodné veličiny.

5 Charakteristiky náhodné veličiny

1. **Příklad:**

   Určete střední hodnotu náhodné veličiny, jejíž pravděpodobnostní funkce je dána tabulkou

x	1	2	3
$f(x)$	p	$\frac{1-p}{2}$	0,3.

2. **Příklad:**

   Určete střední hodnotu a rozptyl náhodné veličiny s rovnoměrným rozdělením na intervalu $(3, 8)$.

3. **Příklad:**

   Určete 0.05-kvantil pro náhodnou veličinu X s hustotou pravděpodobnosti

$$f(x) = \begin{cases} 0.25 & \text{pro } \ x \in (3;7) \\ 0 & \text{jinde.} \end{cases}$$

6 Funkce náhodné veličiny

1. **Příklad:**

   Podle definice střední hodnoty ukažte, že platí

$$E[X+Y] = E[X] + E[Y],$$

   kde X a Y jsou náhodné veličiny.

2. **Příklad:**

   Proveďte transformaci standardního normálního rozdělení $N(0, 1)$ s hustotou pravděpodobnosti

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\{-0,5x^2\}$$

   na normální rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$. Napište transformační funkci a transformovanou hustotu pravděpodobnosti.

3. **Příklad:**

   Náhodná veličina X má pravděpodobnostní funkci

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	0.15	0.1	0.25	0.3	0.2

   Napište pravděpodobnostní funkci náhodné veličiny $Y = 2X$.

7 Konstrukce bodových odhadů

1. **Příklad:**

   Metodou momentů sestrojte statistiku pro odhad parametru p alternativního rozdělení s pravděpodobnostní funkcí
   $$f(x) = p^x(1-p)^{1-x} \qquad \text{pro} \quad x \in \{0;1\}.$$

2. **Příklad:**

   Dokažte nestrannost výběrového průměru jako statistiky pro odhad střední hodnoty souboru.

3. **Příklad:**

   Napište věrohodnostní funkci pro rozdělení s hustotou pravděpodobnosti
   $$f(x) = \begin{cases} a\exp\{-ax\} & \text{pro } \ x \geq 0 \\ 0 & \text{jinde,} \end{cases} \qquad a > 0$$
   a data $x_i = \{2;\ 3;\ 5;\ 8\}$.

8 Intervaly spolehlivosti a parametrické testy hypotéz

1. **Příklad:**

   Určete oboustranný 95% interval spolehlivosti pro odhad parametru θ, jestliže statistika pro tento odhad má rovnoměrné rozdělení na intervalu $(-2, 2)$.

2. **Příklad:**

   Na hladině významnosti 5% testujte nulovou hypotézu "střední rychlost projíždějících automobilů se rovná 50 km/hod." proti alternativní hypotéze "střední rychlost projíždějících automobilů se nerovná 50 km/hod.", jestliže souborový rozptyl rychlostí známe a hodnota testové statistiky, vypočtená z měřených dat je 2,571. Uveďte kritický obor testu. Tabulka kritických hodnot je

α	0,5	0,25	0,1	0,05	0,025	0,01	0,005	0,0025	0,001
z_α	0	0,673	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	2,807	3,090

3. **Příklad:**

   Na hladině významnosti $\alpha = 0.05$ určete kritický obor pro test nulové hypotézy o střední hodnotě při známém rozptylu souboru, jestliže alternativní hypotéza zní: "střední hodnota je menší, než podle nulové hypotézy". Tabulka kritických hodnot je

α	0,5	0,25	0,1	0,05	0,025	0,01	0,005	0,0025	0,001
z_α	0	0,673	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	2,807	3,090

9 Neparametrické testy hypotéz

1. **Příklad:**
   Zkonstruujte teoretické četnosti pro test rovnoměrnosti výskytu dopravních nehod, jestliže v určitém sledovaném období bylo zaznamenáno 56 nehod během všedních dnů, 5 nehod o sobotách a 18 nehod během nedělí. Vypočtěte hodnotu χ^2 statistiky pro tento test.

2. **Příklad:**
   Zkonstruujte teoretické četnosti pro test nezávislosti počtu dopravních nehod (N: nula, 1-10, nad 10) a pohlaví řidiče (P: muž, žena) pro data z kontingenční tabulky

$P\backslash N$	`nula`	`1-10`	`nad 10`
`muž`	26	5	15
`žena`	34	12	3

3. **Příklad:**
   V daném místě dopravní oblasti byl sledován počet dopravních přestupků v různé dny týdnu. Během čtyř týdnů byly zjištěny následující údaje

dny v týdnu	Po-Čt	Pá	So, Ne
počet nehod	43	15	22.

   Na hladině významnosti $\alpha = 0.05$ testujte tvrzení: "přestupky se během týdne vyskytují rovnoměrně". Odpovídající kritická hodnota $\chi^2_{0.05} = 7.8$.

10 Regresní analýza

1. **Příklad:**
   Napište rovnici regresní přímky, pro změřená data

x_i	1	3
y_i	1	5

   a určete hodnotu výběrového korelačního koeficientu.

2. **Příklad:**
   Napište rovnici pro exponenciální regresi a proveďte její linearizaci.

3. **Příklad:**
   Sledujeme závislost veličiny Y na veličině X. Byly naměřeny následující dvojice $[x, y]$: $[-1; 0]$, $[0; 1]$, $[1; 0]$;, $[0; -1]$. Určete, zda jsou tato data vhodná pro lineární regresní analýzu.